1. soutěžní série – řešení

1. Označme l největší liché číslo takové, že $l^2 \leq n$, tedy $(l+2)^2 > n$. Pokud $l \geq 7$, pak $l,\ l-2,\ l-4$ jsou po dvou nesoudělná lichá přirozená čísla, takže podmínka implikuje $l^3 - 6l^2 + 8l = l(l-2)(l-4) \leq n < (l+2)^2 = l^2 + 4l + 4$, neboli $l^3 - 7l^2 + 4l - 4 = l^2(l-7) + 4(l-1) < 0$, což pro $l \geq 7$ neplatí. Rozborem těch n, pro které $l \in \{1, 3, 5\}$, což jsou $n \in \{1, 2, \ldots, 48\}$, získáváme, že řešením jsou právě čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30$ a 45.

2. Existují. Nechť $f(x)$ je libovolná ryze konvexní funkce. Funkci $g(x)$ definujme na intervalu $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ jako afinní funkci, která se v krajních bodech rovná funkci f a dodefinujme $f(0) = g(0)$. Funkce g je konvexní a shoduje se s f právě v bodech 0 a $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Funkce f a $\frac{1}{2}(f+g)$ jsou hledané ryze konvexní funkce.

3. Sál rerezentujeme jako matici o r řádcích a s sloupcích vyplněnou nulami a jedničkami, jednička odpovídá obsazenému a nula volnému místu. Její řádky jsou prvky $(\mathbb{Z}_2)^s$, což můžeme chápat jako vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Řádků je $r > s$, takže existuje jejich netriviální lineární kombinace nad $\mathbb{Z}_2$, která dává nulový vektor v $(\mathbb{Z}_2)^s$. Řádky, které v této kombinaci mají koeficient 1, mají požadovanou vlastnost, protože nulová i-tá souřadnice oné lineární kombinace odpovídá sudému počtu jedniček v i-tém sloupci vybraných řádků.

4. Odpověď je NE. Zapíšeme-li desetinné číslo $x \in (0,1)$ ve dvojkové soustavě jako $0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$, kde $x_i \in \{0, 1\}$, pak $2x = x_1, x_2 x_3 x_4 \ldots$. Navíc číslo $x \geq \frac{1}{2}$, právě když $x_1 = 1$.

K tomu, aby v každém kroku bylo některé z čísel aspoň $\frac{1}{2}$ a jejich součet byl jedna, stačí vzít $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, $y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$ a $z = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ tak, aby pro každé i byla právě jedna z cifer x_i, y_i, z_i rovna jedné. Navíc chceme, aby čísla byla iracionální, tj. měla neperiodický desetinný rozvoj. Můžeme vzít např.

$$
\begin{aligned}
x_i = 1 &\quad \text{právě když } i = n^2 \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N},\\
y_i = 1 &\quad \text{právě když } i = n^2 + 1 \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N},\\
z_i = 1 &\quad \text{právě když } i \notin \{n^2, n^2+1 :\ n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}
$$