6. soutěžní série – řešení

1. Ne. Pokud bychom nalezli takovou uzavřenou podmnožinu F kružnice K, pak bychom jejím otočením o $180°$ dostali také uzavřenou množinu F^C, která by byla doplňkem F v K. Pak by ale souvislá množina K byla sjednocením dvou netriviálních disjunktních uzavřených množin, což není možné.

2. Odečtením $(i+1)$-tého řádku od i-tého pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme matici se stejným n-tým řádkem, 1 nad diagonálou a -1 na hlavní diagonále a pod ní. Odečtením i-tého sloupce od $(i+1)$-tého sloupce pro $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ dostaneme v prvních $n-1$ řádcích 2 na vedlejší diagonále nad hlavní diagonálou, nuly jinde a v posledním řádku zůstane $a_{n1} = n-1$. Odtud plyne, že $\det A = 2^{n-1}(n-1)(-1)^{n-1}$, kde $(-1)^{n-1}$ je znaménko permutace „cyklus délky n“.

3. Snadno ukážeme, že $K(n) = n^2$ nemá požadovanou vlastnost, úplný bipartitní graf $K(n,n)$ (uvažujeme dvě n prvkové množiny vrcholů a všechny hrany z jedné množiny do druhé) má právě n^2 hran a obsahuje jen cykly sudých délek. Nyní ukážeme matematickou indukcí, že $K(n) = n^2 + 1$ už vyhovuje. Pro $n = 2$ máme 5 hran na čtyřech vrcholech, jistě trojúhelník existuje. Indukční krok: Uvažujme graf na $2n+2$ vrcholech s $(n+1)^2+1$ hranami. Vybereme dva vrcholy A, B spojené hranou. Buď z těchto dvou vrcholů vede do zbývajících $2n$ vrcholů více než $2n$ hran, pak do některého vede hrana z A i z B a máme trojúhelník. Nebo je mezi zbývajícími $2n$ vrcholy aspoň n^2+1 hran, a potom je tam trojúhelník dle indukčního předpokladu. Závěr: nejmenší vyhovující $K(n)$ je n^2+1.

4. Pro polynom $Q(x) = a(x-x_1)\cdots(x-x_m)$ stupně m platí

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_m},$$

což plyne ze vzorce pro derivaci součinu. Polynom $R(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ má přesně ty kořeny, které potřebujeme. Proto levou stranu spočteme jako

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{R'(1)}{R(1)} = \frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n} = \frac{n-1}{2}$$

a jsme hotovi.