6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 10. 1. 2018.

Úloha 1. Nechť a, b, c, f jsou reálné polynomy splňující

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz = f(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)).$$

Rozhodněte, zda už nutně musí a, b, c být $\pm x, \pm y, \pm z$ v nějakém pořadí.

Úloha 2. Pro která přirozená čísla n je $2^{2^n} + 67$ prvočíslo?

Úloha 3. Pro $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrovatelnou dokažte

$$\left(\int_0^1 f(x) \cos(x) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 f(x) \sin(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2.$$

Úloha 4. Pro přirozená čísla k, n splňující $k \leq n - 1$ označme $S = \{1, \ldots, n\}$. Buď $A_1, \ldots, A_k$ neprázdné podmnožiny S. Ukažte, že je možné obarvit prvky S červenou a modrou barvou tak, aby:

i) Každý prvek S byl buď červený nebo modrý nebo neobarvený.
ii) Alespoň jeden prvek S byl obarvený.
iii) Každá z množin $A_1, \ldots, A_k$ byla buď celá neobarvená nebo obsahovala zároveň červené i modré prvky.

Úloha 5. Existuje $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ takové, že $n^\alpha \in \mathbb{N}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$?

$\star$ **Úloha 6.** Dokažte, že pro každé prvočíslo $p \equiv 3 \pmod 4$ platí

$$\prod_{1 \leq x < y \leq \frac{p-1}{2}} (x^2 + y^2) \equiv (-1)^{\left\lfloor \frac{p+1}{8} \right\rfloor} \pmod p,$$

kde $\lfloor z \rfloor$ značí celou část z.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`