4. soutěžní série – řešení

1. Danou rovnici lze upravit do tvaru $(x-1)(y-1)(z-1)=1$. Odtud plyne, že řešení jsou $(x,y,z)=(2,2,2),(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)$.

2. Označme Z střed strany AD a jeho středové obrazy podle X a Y označme E a F. Pak $|AZ|=|EB|$, $|ZD|=|CF|$ a XY je střední příčkou trojúhelníku EFZ. Odtud plyne, že $2|XY|=|EF|\le|EB|+|BC|+|CF|=|AD|+|BC|$ a rovnost nastává právě tehdy, když úsečky BC a AD jsou rovnoběžné.

3. Je možné dosáhnout právě taková (a,b), pro která je $\mathrm{NSD}(a,b)=2^s$, $s\in\mathbb{N}_0$.

Pravidlem ii) se NSD nemění a pravidlem i) se může pouze násobit dvěma, takže $\mathrm{NSD}(a,b)=2^s$ je nutnou podmínkou pro dosažení bodu (a,b).

Nechť $\mathrm{NSD}(a,b)=2^s$. Ze všech pozic, ze kterých je možné se dostat do (a,b), mezi kterými je například (a,b), vybereme (c,d) minimalizující $c+d$. Pak z pravidla i) plyne, že c a d jsou lichá. Pokud $c>d$, pak se do (c,d) lze dostat z $(\frac{c+d}{2},d)$, ale $\frac{c+d}{2}+d<c+d$. Obdobný spor dostáváme pro $c<d$. Takže se do (a,b) lze dostat z pozice (c,d), kde $c=d$ a $\mathrm{NSD}(c,d)=1$, tedy $c=d=1$.

4. If $f\equiv 0$, the assertion is trivial. Otherwise, $\max_{[0,1]}f>0>\min_{[0,1]}f$. Let a, resp. b be points where f attains its maximum, resp. minimum. WLOG we assume $a<b$ (otherwise, take $-f$ instead of f). So, $0\le a<b$ and $f(a)>0>f(b)$. Define $g(x)=n\int_0^x t^n f(t)dt-x^{n+1}f(x)$. The task is to find $c\in(0,1)$ with $g(c)=0$. We have

$$g(b)=n\int_0^b t^n f(t)dt-b^{n+1}f(b)\ge n\int_0^b t^n f(b)dt-b^{n+1}f(b)=-\frac{1}{n+1}b^{n+1}f(b)>0$$

$$g(a)=n\int_0^a t^n f(t)dt-a^{n+1}f(a)\le n\int_0^a t^n f(a)dt-a^{n+1}f(a)=-\frac{1}{n+1}a^{n+1}f(a)\le 0$$

and the last inequality is strict whenever $a\neq 0$. Since g is continuous, $g(a)<0<g(b)$ implies existence of $c\in(a,b)$ with $g(c)=0$. So, it remains to solve the case $a=0$. But then we have

$$\frac{g(x)}{x^{n+1}}=\frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f(t)dt-f(x)\le\frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f(0)dt-f(x)=\frac{n}{n+1}f(0)-f(x).$$

As $\lim_{x\to 0+}\frac{n}{n+1}f(0)-f(x)<0$, we have $\frac{g(x)}{x^{n+1}}<0$ for small $x>0$, therefore $g(x)<0$ for $x\in(0,\varepsilon)$. So, we can use intermediate value theorem to find $c\in(\varepsilon,b)$ with $g(c)=0$.