3. soutěžní série

15. 11. 2017

Úloha 1. Buď A neprázdná množina. Nechť binární operace $\circ : A \times A \to A$ splňuje $x \circ (x \circ y) = y$ a $(x \circ y) \circ y = x$ pro všechna $x, y \in A$. Ukažte, že $\circ$ je komutativní. (5 bodů)

Úloha 2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ začíná členy $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ a je určena rekurentním vzorcem

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n, \; n = 0, 1, 2, \dots .$$

Ukažte, že $n | a_n$ pro všechna přirozená n. (10 bodů)

Úloha 3. Rozhodněte, zda pro monotónní posloupnosti a_n, b_n platí že pokud řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergují, pak diverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$. (10 bodů)

Úloha 4. Dva hráči hrají následující hru: Nechť $n > 1$ je předem dané přirozené číslo. Hra začíná s číslem $k = 2$ a hráči se střídají v tazích. Hráč ve svém tahu nahradí k číslem $k + 1$ nebo $2k$. Hráč, který nahradí k číslem větším než n, prohrává. V závislosti na n rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii. (15 bodů)