3. soutěžní série – řešení

1. Označme (1) $x \circ (x \circ y) = y$ a (2) $(x \circ y) \circ y = x$. Vypočtěme dvěma způsoby výraz $V(x, y) = (x \circ y) \circ [(x \circ y) \circ y]$. Rovnost (1) pro $z = x \circ y$ dává $V(x, y) = y$. Na druhou stranu, rovnost (2) použitá na hranatou závorku dává $V(x, y) = (x \circ y) \circ x$. Máme tedy (3) $y = (x \circ y) \circ x$.

Dostáváme $y \circ x = ((x \circ y) \circ x) \circ x = x \circ y$, kde první rovnost plyne z (3) a druhá rovnost plyne z (2) (x ve (2) nahradíme výrazem $x \circ y$. Důkaz je hotov.

2. Chceme ukázat, že čísla ve tvaru $\frac{a_n}{n}$ pro $n \geq 1$ jsou celá. První členy této posloupnosti jsou $1, 1, 2, 3, 5$. Bude nám stačit ukázat, že $\frac{a_n}{n}$ jsou vždy Fibonacciho čísla F_n. Nechť platí $a_k = kF_k$ pro $k \leq n + 3$. Potom máme

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + 2F_{n+2} - (n+2)F_{n+1} \\
&= (n+4)F_{n+3} + (n+4)F_{n+2} = (n+4)F_{n+4}.
\end{aligned}$$

3. Tvrzení neplatí. Myšlenka: vezměme nějakou konvergentní řadu, např. $\sum 2^{-n}$. Posloupnosti (a_n), (b_n) konstruujme tak, aby na nějakém (dlouhém) úseku platilo $a_n = 2^{-n}$ a $b_n = c_1 \geq a_n$ a na dalším úseku si posloupnosti vyměnily role, tj. $b_n = 2^{-n}$ a $a_n = c_2 \geq b_n$ a tak dále. Dost dlouhé konstantní úseky zaručí divergenci obou řad a přitom $\min\{a_n, b_n\} = 2^{-n}$ pro všechna n.

Konkrétně: zkonstruujme rostoucí posloupnost indexů $n_0, n_1, \ldots$ a pro (sudé úseky) $n \in [n_{2k}, n_{2k+1} - 1]$ položme $a_n = 2^{-n}$, $b_n = 2^{-n_{2k}}$ a pro (liché úseky) $n \in [n_{2k+1}, n_{2k+2} - 1]$ naopak $b_n = 2^{-n}$, $a_n = 2^{-n_{2k+1}}$. Takto definované posloupnosti jsou nerostoucí a platí $\min\{a_n, b_n\} = 2^{-n}$ pro všechna n. Na úseku $[n_k, n_{k+1} - 1]$ nabývá jedna z posloupností ((a_n) pro k liché, (b_n) pro k sudé) konstantní hodnoty 2^{-n_k}. Volme tedy $n_{k+1} = n_k + 2^{n_k}$, aby úsek měl délku 2^{n_k} a příslušná posloupnost na něm měla součet 1. To zaručí, že obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergují.

4. Pokud $n = 2$, pak první hráč svým prvním tahem prohraje.

Pokud je n liché, pak první hráč použije pouze tah $k \to k + 1$. Začne s číslem $k = 2$, druhému hráči dá liché číslo 3, ať druhý hráč dělá cokoliv, pošle prvnímu hráči zpět sudé číslo a první hráč ho zvětší o 1, opět pošle druhému hráči liché číslo a tak postupují dále. Není možné, aby první hráč zvětšením sudého k o 1 překročil lichou hranici n, a proto vyhraje.

Pokud hráč A umí vyhrát pro n, pak může vyhrát i pro $4n$, $4n + 2$. Díky své vítězné strategii pro n hráč A zařídí, že hráč B jako první vytvoří číslo $k > n$ (a tedy také $k \leq 2n$), pak A vytvoří sudé číslo $2k \in [2n+2, 4n]$. Po zbytek hry už hráči musí pouze zvětšovat k o jedna (neboť $2 \cdot (2n + 2) > 4n + 2$), a protože $4n$ i $4n + 2$ jsou sudá, vyhraje A.

Jinými slovy: Pokud nějaký hráč umí vyhrát pro $n = \overline{c_0 c_1 \ldots c_m}$, kde $c_0, \ldots, c_m$ jsou číslice čtyřkového zápisu n, pak také umí vyhrát pro $n_0 = \overline{c_0 \ldots c_m 0}$ a $n_2 = \overline{c_0 \ldots c_m 2}$. Neboli druhý hráč vyhraje, právě když n má ve čtyřkové soutavě pouze číslice 0 a 2.