3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 22. 11. 2017.

Úloha 1. Ukažte, že reálný polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, jehož koeficienty splňují $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{2i+1} = 0$, má alespoň jeden reálný kořen.

Úloha 2. Mějme 50 (ne nutně různých) intervalů. Dokažte, že alespoň osm z nich má společný neprázdný průnik, nebo alespoň osm z nich je po dvou disjunktních.

Úloha 3. Uvažujme mnohoúhelník K v rovině, jehož obsah je alespoň $\frac{\pi}{4}$. Ukažte, že existují body $P,\ Q \in K$ splňující $|PQ| = 1$.

Úloha 4. Čtvercové reálné matice A, B komutují a splňují $A^{2017} = B^{2018} = I$. Ukažte, že $A + B + I$ je regulární.

⋆ **Úloha 5.** Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{\cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$

⋆ **Úloha 6.** Mějme tvrzení „Pro každou funkci $f : M \times M \to \mathbb{R}$ existuje funkce $g : M \to \mathbb{R}$ splňující $f(x, y) \leq g(x)+g(y)$ pro všechna $x, y \in M$.“

a) Ukažte, že tvrzení platí pro $M = \mathbb{Q}$.

b) Ukažte, že tvrzení neplatí pro $M = \mathbb{R}$.