2. soutěžní série

25. 10. 2017

Úloha 1. Ukažte, že reálný polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, jehož koeficienty splňují $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0$, má alespoň jeden reálný kořen. (5 bodů)

Úloha 2. Nechť m je přirozené číslo. Zvolme $2m-1$ uzavřených intervalů na reálné ose (nazývejme je *velké*) tak, že každé dva mají neprázdný průnik. Dále vezměme několik uzavřených intervalů (nazývejme je *malé*) tak, aby každý velký interval obsahoval nějaké dva disjunktní malé intervaly. Ukažte, že některý malý interval je částí m velkých intervalů. (10 bodů)

Úloha 3. Existuje množina $X \subset \mathbb{N}_0$ taková, že všechna $n \in \mathbb{N}_0$ lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $n = a + 2b$, kde $a, b \in X$? ($\mathbb{N}_0$ je množina nezáporných celých čísel.) (10 bodů)

Úloha 4. Nechť reálné $n \times n$ matice A, B, C, D splňují $AD^T - BC^T = I$, a AB^T a CD^T jsou navíc symetrické. Dokažte, že $A^T D - C^T B = I$. (10 bodů)