

1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 18. 10. 2017.

Úloha 1. Které číslo je větší: 3^π nebo π^3 ?

Úloha 2. Uvažujme úplný graf na n vrcholech, ve kterém je každá hrana orientována buď $i \rightarrow j$, nebo $j \rightarrow i$. Rozhodněte, zda musí existovat permutace vrcholů a_i taková, že $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$?

Úloha 3. Buď $f(x) = \frac{2}{4^x+2}$. Sečtěte

$$f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right).$$

Úloha 4. Je dáno $n \geq 3$ bodů v rovině tak, že vzdálenost libovolných dvou z nich je nejvýše 1. Ukažte, že dvojic daných bodů se vzdáleností 1 může být nejvýše n .

Úloha 5. Čísla $1, 3, 6, \dots, \frac{1}{2}n(n+1), \dots$ nazveme *trojúhelníková*. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic a_i, b_i takových, že pro každé přirozené číslo m platí:

$$m \text{ je trojúhelníkové} \Leftrightarrow a_i + mb_i \text{ je trojúhelníkové.}$$

★ **Úloha 6.** Spojitá nezáporná funkce $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje pro všechna $t \in [0, 1]$ nerovnost

$$f(t)^2 \leq 1 + 2 \int_0^t f(s) ds.$$

Ukažte, že $f(t) \leq 1 + t$ pro všechna $t \in [0, 1]$.