6. soutěžní série – řešení

1. Ano. Jde to například takto: Vezmeme 2020 rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků, z nich vyrobíme 1010 čtverců a z těchto poskládáme obdélník 10×101. Odstraníme-li z něj tři rohové trojúhelníky, získáme požadovaný sedmiúhelník.

2. Spočítejme nejprve trojúhelníky orientované špičkou nahoru (tošny). Označme A_k počet tošnů v tošnu o straně k, pak hledaný počet je $A_n + A_{2n-2} - A_{n-2}$ (spodní lichoběžník doplníme na trojúhelník a použijeme princip inkluze a exkluze). Počet tošnů velikosti l v tošnu velikosti k (pro $l \le k$) je $1 + 2 + \cdots + (k - l + 1) = \frac{1}{2}(k - l + 1)(k - l + 2)$, protože jejich špičky tvoří tošn o straně délky $k - l$. Celkově tedy $A_k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} l(l+1) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}(l^2 + l) = \frac{1}{2}(\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \frac{1}{2}k(k+1)) = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$.

Počítejme trojúhelníky orientované špičkou dolů (tošdy). Označme B_k počet tošdů v tošnu velikosti k a C_k počet tošdů v kosočtverci o straně k. Doplňme horní trojúhelník o straně $n-1$ na kosočtverec, pak princip inkluze a exkluze dává počet tošdů $B_{2n-2} + C_{n-1} - C_{n-2}$. Špičky tošdů velikosti l obsažených v kosočtverci velikosti k tvoří kosočtverec velikosti $k-l$, je jich tedy $(k-l+1)^2$. Takže $C_{n-1} - C_{n-2} = \sum_{l=1}^{n-1} l^2 - \sum_{l=1}^{n-2} l^2 = (n-1)^2$. Špičky tošdů velikosti l v tošnu velikosti k tvoří tošn o straně $k-2l$, je jich tedy $\frac{1}{2}(k-2l+1)(k-2l+2)$ a celkově máme $B_{2n-2} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1} 2l(2l-1) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}(4l^2 - 2l) = \frac{1}{3}(n-1)n(2n-1) - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{6}n(n-1)(4n-5)$.

Celkově máme $A_n + A_{2n-2} - A_{n-2} + (n-1)^2 + B_{2n-2} = 2n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$.

3. Nechť $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) + g(x) < 0\}$; ukážeme, že (neprázdné) intervaly $I_x = (f(x), -g(x))$ jsou pro různá $x \in S$ disjunktní, tím pádem bude existovat jen spočetně mnoho takových intervalů a S bude spočetná.

Pro spor nechť I_x a I_y jsou junktní. BÚNO $f(y) \ge f(x)$, pak $f(y) < -g(x)$, takže $f(y) + g(x) < 0$. Současně ovšem $f(x) + g(y) \le f(y) + g(y) < 0$, spor.

4. Napišme si cifry do matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Ukážeme, že

$$\det A = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d). \qquad (*)$$

Sečteme-li všechny čtyři řádky, dostaneme $(a+b+c+d)\cdot(1,1,1,1)$, tedy determinant je dělitelný $a+b+c+d$. Sečteme-li první dva řádky a poslední dva odečteme, získáme $(a+b-c-d)\cdot(1,1,-1,-1)$, tj. determinant je dělitelný číslem $a+b-c-d$. Podobně pro další dvě čísla. Protože $\det A$ musí být polynom čtvrtého stupně v proměnných a, b, c, d s koeficientem 1 u a^4, je rovnost (*) dokázána.

Přičteme-li nyní k poslednímu sloupci 10-násobek třetího, 100-násobek druhého a 1000-násobek prvního, získáme v posledním sloupci čísla $\overline{abcd}$, $\overline{badc}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dcba}$, která jsou dělitelná p, tedy i determinant je dělitelný p, tedy jedna ze závorek v (*) je dělitelná p.