5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 12. 12. 2016.

Úloha 1. Dokažte, že neexistuje konečný okruh R (ne nutně komutativní nebo s jednotkou) takový, že pro každé $x \in R$ existuje $y \in R$ splňující $y^2 = x$ a $y \neq x$.

Úloha 2. (seriál) Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má ostrá lokální maxima právě v bodech množiny $A \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že A je spočetná.

Úloha 3. Ukažte, že pro každou dvojici čtvercových matic nad $\mathbb{C}$ existuje jejich lineární kombinace, která je rovna singulární matici. Je to pravda pro matice nad $\mathbb{R}$?

Úloha 4. Ukažte, že pro všechny trojice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňující $x + y + z = 1$ platí $10|x^3 + y^3 + z^3 - 1| \leq 9|x^5 + y^5 + z^5 - 1|$. Kdy nastává rovnost?

⋆ **Úloha 5.** V Grafistánu je 17 měst a 105 společností, které se zabývají stavěním dálnic. Mezi každými dvěma městy má být postavena dálnice. ŘSD obdrželo od expertních týmů n návrhů, každý z nich specifikuje, které dálnice má postavit která společnost. Pro každých patnáct měst existuje návrh, ve kterém každá ze společností postaví právě jednu ze 105 dálnic mezi těmito patnácti městy. Kolik minimálně návrhů se sešlo na ŘSD?

⋆ **Úloha 6.** Nalezněte všechna přirozená čísla n s vlastností: Existují dva dělitelé a, b čísla n takoví, že $n \mid a^2 + b^2 + 1$.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`