3. soutěžní série – řešení

1. Volme $x \in (a,b)$ libovolně a označme $A = \{y > x : \forall w \in (x,y]\ f(w) > f(x)\}$ a $z = \sup A$. Protože f je rostoucí v bodě x, je A je neprázdná a $z > x$. Ukážeme-li, že $z = b$, bude tvrzení dokázáno. Předpokládejme pro spor, že $z < b$. Jistě pro všechna $w \in (x,z)$ platí $f(y) > f(x)$. Pokud $z \notin A$, pak $f(z) \leq f(x)$ a pro všechna $w \in (z-\delta, z)$ platí $f(w) > f(x) \geq f(z)$, což je spor s tím, že f je rostoucí v bodě z. Pokud naopak $z \in A$, pak pro všechna $w \in (z, z+\delta)$ máme $f(w) > f(z) > f(x)$, což je spor s tím, že $z = \sup A$.

2. Zvolme libovolně vrchol v_1 a konstruujme co nejdelší cestu $v_1, v_2, \dots$ v G; tento proces se díky konečnosti G zastaví na nějakém vrcholu v_n. Z v_n už tedy musí vést hrany pouze do již použitých vrcholů. Jelikož v_n má stupeň aspoň 3, vedou z něj (kromě do v_{n-1}) hrany do nějakých v_a, v_b (kde $a < b < n$). Uvažme nyní tyto tři cykly v G: $(v_a, \dots, v_{n-1}, v_n)$, $(v_b, \dots, v_{n-1}, v_n)$ a $(v_a, \dots, v_b, v_n)$. Jejich délky jsou po řadě $n-a+1$, $n-b+1$ a $b-a+2$. Jelikož $(n-a+1)-(n-b+1)-(b-a+2) = -2$ není dělitelné třemi, alespoň jeden z těchto cyklů nemá délku dělitelnou třemi.

3. Umístěme body do komplexní roviny: $A = -1$, $B = -i$, $C = 1$, $D = i$, $Y = 1+x$, $W = 1 + ix$, $R = -1 + y$, $T = -1 - iy$, kde $x, y \in \mathbb{C}$. Pak $M = i(x-y)/2$. Chceme ukázat, že MB je kolmá na RY, neboli že $(M-B)/(R-Y)$ je ryze imaginární, což je (je to $-i/2$).

4. Označme $A_j = \prod_{i \leq n, i \neq j} a_i$. Pak $a_i \mid A_j$ pro $i \neq j$ a $a_i \mid A_i - r$; pro každé i tedy platí $a_i \mid A_1 + \cdots + A_n - r$. Díky nesoudělnosti je tedy

$$\frac{A_1 + \cdots + A_n - r}{a_1 \cdots a_n} = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} - \frac{r}{a_1 \cdots a_n}$$

přirozené číslo. Kdyby nyní platilo $\min\{a_1, \dots, a_n\} \geq n$, bylo by

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \frac{1}{2n-1} < 1,$$

je tedy (BÚNO) $a_1 < n$. Jelikož je $r < a_1$, musí být $r \leq n-2$.