

2. soutěžní série

24. 10. 2016

Úloha 1. Na kružnici rozmístíme 111 jablek, některá červená a některá zelená tak, že pokud je někde zelené jablko, pak mezi následujícími třemi jablky (ve směru hodinových ručiček) jsou právě dvě zelená, a pokud je někde červené jablko, pak toto naopak nesmí platit. Ukažte, že všechna rozmístěná jablka jsou červená. (5 bodů)

Úloha 2. Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost $a_k = k$ pro $k = 1, \dots, 2017$, $a_{k+1} = a_k + a_{k-2016}$ pro $k \geq 2017$. Ukažte, že tato posloupnost obsahuje 2016 po sobě jdoucích členů dělitelných 2017. (10 bodů)

Úloha 3. Buď $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelná na $[a, b]$ s kladnou derivací na (a, b) . Pak pro každou dvojici (x, y) , $a \leq x < y \leq b$, $f(x)f(y) > 0$, existuje $t \in (x, y)$ splňující

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)} = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Dokažte. (10 bodů)

Úloha 4. Pro kladná čísla x, y, z splňující $xyz = 1$ platí

$$\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{y+1}{y^2-y+1}} + \sqrt{\frac{z+1}{z^2-z+1}} \leq 3\sqrt{2}.$$

Dokažte. (25 bodů)