2. soutěžní série – řešení

1. Dokazujme sporem. Všechna jablka nemohou být zelená. Pokud jsou zastoupeny obě barvy, pak je za některým zeleným červené. Pak jsou ale další tři jablka nutně zelená, pak další musí být červené a pak zase tři zelená, červené a tak pořád dál, což znamená, že počet jablek musí být dělitelný čtyřmi. To ale 111 není.

2. Evidentně platí, že všechna a_k jsou celá. Protože a_k závisí jen na předchozích 2017 členech a uspořádaných 2017-tic čísel 0, 1, ..., 2016 je jen konečně mnoho, posloupnost se nutně od nějakého indexu stane periodickou modulo 2017. Přepišme rekurenci do tvaru $a_{k-2016} = a_{k+1} - a_k$ a dodefinujme posloupnost i pro záporné indexy. Pak pro $k < 0$ budou a_k také celočíselná a rozmyslete si, že posloupnost $(a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ musí být ve skutečnosti periodická modulo 2017. Nyní si stačí všimnout, že $a_1 = \cdots = a_{-2015} = 1$ a $a_{-2016} = \cdots = a_{-4031} = 0$ a díky periodicitě dostaneme i někde později 2016 po sobě jdoucích členů s nulovým zbytkem modulo 2017.

3. Zdá se, že půjde o aplikaci Cauchyovy věty o střední hodnotě. Vydělíme-li čitatel i jmenovatel zlomku na levé straně výrazem $f(x)f(y) \neq 0$, získáme po úpravě

$$\frac{\frac{x}{f(x)} - \frac{y}{f(y)}}{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}} = t - \frac{f(y)}{f'(t)}.$$

Aplikací Cauchyovy věty s $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ a $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ získáváme požadované. Rozmyslete si, že f je na intervalu (x, y) (případně (y, x)) nenulová, takže g a h jsou C^1 a $h' \neq 0$.

4. Označme $g(t) = (1 - t + t^2)^{-1}$ a přejmenujme x, y, z na x_1, x_2, x_3. Následující sumy jsou pro $i = 1, 2, 3$, resp. $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem plyne, že levá strana zadané nerovnosti není větší než

$$3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \sum (1 + x_i) g(x_i)}.$$

Protože $t \leq 1 - t + t^2$, tj. $tg(t) \leq 1$, je toto menší nebo rovno $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sum g(x_i)}$. Zbývá tedy dokázat, že $\sum g(x_i) \leq 3$. Roznásobením získáme

$$2 \sum x_i - \frac{1}{2} \sum x_i x_j + \sum x_i^2 + \sum x_i^2 x_j^2 - 2 \sum x_i^2 x_j \geq 0.$$

Stačí ukázat, že levá strana mínus $(1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2 (1 - x_3)^2$ je nezáporná, což dává

$$6 - \frac{3}{2} \sum x_i x_j + \frac{1}{2} \sum x_i^2 x_j^2 \geq 0.$$

Substitucí $X = 1/x_1$, $Y = 1/x_2$, $Z = 1/x_3$ dostáváme

$$H(X, Y, Z) := 6 - 3(X + Y + Z) + (X^2 + Y^2 + Z^2) \geq 0.$$

BÚNO $Z \leq 1$. Rozmyslete si, že

$$H(X, Y, Z) = h(\sqrt{XY}, \sqrt{XY}, Z) + (X - Y)^2 - 3(\sqrt{X} - \sqrt{Y})^2 \geq H(\sqrt{XY}, \sqrt{XY}, Z).$$

Pak $Z \leq 1$ dává

$$H(\sqrt{XY}, \sqrt{XY}, Z) = H(1/\sqrt{Z}, 1/\sqrt{Z}, Z) = (Z^2 + 2Z\sqrt{Z} + 2(1 - \sqrt{Z}))(\sqrt{Z} - 1)^2 / Z \geq 0.$$