2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 31. 10. 2016.

Úloha 1. Líza a Lojza hrají následující hru na mnohostěnu, který má aspoň pět stěn a z každého vrcholu vycházejí právě tři hrany. Líza obarví žlutě stěnu, kterou si vybere, pak Lojza obarví některou z dosud neobarvených stěn červeně, pak zase Líza některou neobarvenou žlutě a tak dále. Vyhrává ten, komu se podaří obarvit svou barvou všechny tři stěny sousedící s jedním vrcholem. Kdo má vyhrávající strategii?

Úloha 2. Diferencovatelné funkce $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou lineárně nezávislé. Dokažte, že mezi $f_1', \dots, f_n'$ je alespoň $n-1$ lineárně nezávislých funkcí.

Úloha 3. Mějme bod P uvnitř trojúhelníka ABC a označme p_a, p_b, p_c délky výšek spuštěných z bodu P po řadě na strany BC, AC, AB trojúhelníka. Označme dále R, resp. r poloměr kružnice opsané, resp. vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte nerovnost

$$\frac{R}{2r} \leq \frac{|PA||PB||PC|}{(p_a+p_b)(p_a+p_c)(p_b+p_c)},$$

kde $|PX|$ označuje délku úsečky PX.

Úloha 4. (seriál) Existuje posloupnost spojitých funkcí na $[0,1]$, která konverguje právě ve všech diadických bodech? (tj. pro všechna $x \in [0,1]$ platí: $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje vlastní, právě když $x = m2^{-n}$ pro nějaká $m, n \in \mathbb{N}_0$)

⋆ **Úloha 5.** Nechť R je okruh (s jednotkou, ne nutně komutativní) a x jeho prvek, který má pravý inverz (tj. prvek $y \in R$ takový, že $xy = 1$), ale nemá žádný levý inverz. Ukažte, že pak má x nekonečně mnoho pravých inverzů.

⋆ **Úloha 6.** Buď S množina všech čísel q, pro něž existuje právě jedna posloupnost $a : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ splňující

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^{-n} = 1.$$

Ukažte, že S je nespočetná.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`