# 1. soutěžní série

10. 10. 2016

**Úloha 1.** Do tabulky $n \times n$ napíšeme čísla $1, 2, \ldots, n^2$ popořadě tak, že nejprve vyplníme zleva doprava první řádek, potom druhý atd. Např. pro $n = 3$ tedy dostaneme

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Nyní v tabulce vybereme $n$ políček tak, abychom z každého řádku i každého sloupce vybrali právě jedno, a čísla na vybraných pozicích sečteme. Jaké možné výsledky můžeme dostat? (5 bodů)

**Úloha 2.** Mgr. Petr Střihač, Ph.D. se ve výzkumném ústavu stužkostřižném zabývá stříháním stužek na úseky celočíselných délek. Pro stužku délky $n$ označme $A(n)$ počet různých výsledků, které může získat jejím rozstříháním na části délek aspoň 2 a $B(n)$ počet různých výsledků s aspoň jedním kusem liché délky (výsledky, které se liší jen uspořádáním, považujeme za stejné). Ukažte, že $A(2n+1) \leq B(2n)$. (10 bodů)

**Úloha 3.** Mějme pět reálných čísel, pro něž platí, že součet libovolných tří je větší než součet zbývajících dvou. Rozdíl těchto dvou součtů je tedy kladné číslo. Vynásobíme-li všech 10 takových rozdílů (pro všechny možné trojice čísel), pak výsledný součin je menší nebo roven druhé mocnině součinu původních čísel. Dokažte. (10 bodů)

**Úloha 4.** Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce splňující $f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$ pro všechna reálná $x$. Ukažte, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [-1, 1]$. (20 bodů)