1. soutěžní série – řešení

1. Nechť $\sigma(n)$ značí, kolikáté číslo se zvolilo v n-tém řádku. Potom je zvoleným číslem v prvním řádku $0 \cdot n + \sigma(1)$, ve druhém $1 \cdot n + \sigma(2)$, atd. až v posledním řádku je $(n-1) \cdot n + \sigma(n)$. Jelikož $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ jsou jen nějak seřazená čísla $1, 2, \ldots, n$, součet ze zadání je vždy roven

$$n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n^2+1)n}{2}.$$

2. Mějme nějaké rozstříhání stužky dlouhé $2n+1$, které neobsahuje části délky 1. Rozstříhejme nyní některou z nejkratších částí (nechť má délku $k \geq 2$) na úseky délky 1 a jeden z nich zahoďme. Tím získáme rozstříhání stužky dlouhé $2n$, které obsahuje aspoň jeden úsek délky 1, tj. liché délky. Zbývá si uvědomit, že toto přiřazení je prosté. Zkusme ho invertovat: slepíme-li všechny úseky délky 1 a ještě k nim připojíme jeden navíc, získáme zpět původní rozstříhání.

3. Označme čísla $x_1, \ldots, x_5$ a dále počítejme indexy modulo 5. Definujme (dvě odčítaná čísla jsou buď sousední, nebo je mezi nimi jedno přičítané číslo)

$$\begin{aligned} a_i &= x_i + x_{i+1} - x_{i+2} - x_{i+3} + x_{i+4} \\ b_i &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} - x_{i+4}. \end{aligned}$$

Nyní $a_i + b_i = 2x_i$, tedy

$$x_i^2 - a_i b_i = \left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)^2 - a_i b_i = \left(\frac{a_i - b_i}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Takže $x_i^2 \geq a_i b_i$ a protože a_i, b_i jsou dle zadání kladná, můžeme nerovnosti pro všechna i mezi sebou vynásobit a jsme hotovi.

4. Rovnost $f(2x^2-1) = 2xf(x)$ a $x \in [-1,1]$ nás navádí k substituci $x = \cos t$, která převádí původní rovnost na $f(\cos 2t) = 2 \cos t f(\cos t)$. Označíme-li $g(t) = f(\cos t)$, máme $g(2t) = 2g(t)\cos t$. Jistě $g(t) = c \sin t$ tuto rovnost splňují. Chceme ukázat, že jiná řešení nejsou. Označíme-li $h(t) = \frac{g(t)}{\sin t}$, pak

$$h(2t) = \frac{g(2t)}{\sin 2t} = \frac{2g(t)\cos t}{2 \sin t \cos t} = h(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ t \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Protože g a tedy i h je 2π-periodická, máme

$$h(t) = h(2^{n+1}t) = h(2^{n+1}t + 2k\pi) = h(t + k2^{-n}\pi), \quad k, n \in \mathbb{Z},\ t \neq l\pi 2^{-m},\ l, m \in \mathbb{Z}$$

a ze spojitosti h dostáváme $h(t) = c$ pro všechna $t \neq k\pi$, a tedy $g(t) = c \sin t$, $t \neq k\pi$ a ze spojitosti i pro $t = k\pi$. Protože $g(t) = f(\cos t)$ je sudá, máme nutně $c = 0$. Takže $f = 0$ na $[-1, 1]$.