1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 17. 10. 2016.

Úloha 1. Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť A_n označuje číslo sestávající z $2n$ čtyřek a B_n číslo sestávající z n osmiček. Ukažte, že $A_n + 2B_n + 4$ je vždy druhou mocninou přirozeného čísla.

Úloha 2. Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y taková, že $f(x+y) < f(xy)$.

Úloha 3. Najděte nejmenší číslo S takové, že libovolné dva čtverce se součtem obsahů rovným jedné lze umístit do nějakého obdélníku o obsahu S tak, aby se jejich vnitřky nepřekrývaly a jejich strany byly rovnoběžné se stranami obdélníka.

Úloha 4. *Výškou* v konvexním pětiúhelníku nazveme kolmici spuštěnou z vrcholu na protější stranu (tj. na tu, která nemá společný bod s ani jednou ze stran, pro které je zvolený vrchol krajním bodem). Dokažte, že pokud se čtyři výšky protínají v jednom bodě, pak tímto bodem prochází i pátá výška.

$\star$ **Úloha 5.** Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, c existuje přirozené n, pro něž $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}$ není celé číslo.

$\star$ **Úloha 6.** Nechť $G = (V, E)$ je souvislý (jednoduchý konečný) graf. Pro $x, y \in V$ označme $d_G(x, y)$ délku nejkratší cesty mezi x a y, dále nechť $r_G(x) = \max\{d_G(x, y) \mid y \in V\}$ a $r(G) = \min\{r_G(x) \mid x \in V\}$. Dokažte, že pokud $r(G) \geq 2$, pak G obsahuje cestu délky $2r(G) - 2$ jako indukovaný podgraf.