6. soutěžní série

4. 1. 2016

Úloha 1. Dokažte: jestliže kladná čísla x, y, z splňují $x + y + z = 3$, pak

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + y + 1} + \frac{z^4 + z^2 + 1}{z^2 + z + 1} \geq 3xyz.$$

Úloha 2. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce, která splňuje $f(0) = 1$ a $|f(x)| \leq e^{-x}$ pro $x \geq 0$. Dokažte, že existuje $c > 0$ takové, že $f'(c) = -e^{-c}$.

Úloha 3. V (konečném jednoduchém) souvislém grafu G jsou hrany ohodnoceny reálnými čísly tak, že každá hrana má jiné číslo. Pro každou Hamiltonovskou cestu v G si poznačíme v ní se nacházející hranu s nejvyšším číslem a ty hrany, které jsme si aspoň jednou poznačili, z grafu odstraníme. Dokažte, že v takto pozměněném grafu platí, že mezi každými třemi různými vrcholy najdeme dva, mezi kterými vede cesta.

Úloha 4. Dokažte, že rovnice

$$\Phi_7(x) = y^5 - 1$$

nemá celočíselné řešení.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`