6. soutěžní série – řešení

1. Zkrátíme-li zlomky na levé straně, dostaneme $x^2 - x + 1 + y^2 - y + 1 + z^2 - z + 1$, což je rovno $x^2 + y^2 + z^2$. Levá strana je tedy (dle AG nerovnosti použité na x^2, y^2, z^2) větší nebo rovna $3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$. Další AG nerovnost nám dává $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z) = 1$, odkud máme $(xyz)^{2/3} \geq xyz$ a důkaz je hotov.

2. Uvažme funkci $g(x) = f(x) - e^{-x}$; chceme ukázat existenci $c \in (0, +\infty)$ splňujícího $g'(c) = 0$. Zřejmě $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ a $g(0) = 0$, na intervalu $(0, +\infty)$ tedy g musí někde nabývat lokálního extrému, tedy je někde její derivace nulová, což jsme chtěli.

3. Nechť x, y, z jsou tři různé vrcholy grafu G a nechť S je množina cest mezi některými dvěma z těchto vrcholů. Uvažme tu $C \in S$, která má minimální číslo nejdražší hrany. Je-li H Hamiltonovská cesta v G, pak tato obsahuje právě dvě cesty z S (spojující dvě různé dvojice vrcholů); na ní vybraná hrana tedy určitě nikdy nebude z C, protože na oné druhé podcestě H z S (která je hranově disjunktní s C) bude hrana s vyšším číslem (dle volby C). Žádná hrana z C tedy nebude odebrána, a tak vrcholy spojené C v G zůstanou spojené i v novém grafu.

4. Pro spor předpokládejme taková x, y. Z vlastnosti cyklotomických polynomů musí každé prvočíslo p, které dělí $\Phi_7(x)$, splňovat $p = 7$ nebo $p \equiv 1 \pmod 7$. Proto pro každý dělitel $d \mid \Phi_7(x)$ – speciálně pro $d_0 = y - 1$ a pro $d_1 = y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ – platí $d \equiv 0 \pmod 7$ nebo $d \equiv 1 \pmod 7$. Rozebereme dva případy. Když $d_0 \equiv 0 \pmod 7$, tak $y \equiv 1 \pmod 7$ a tak $d_1 \equiv 5 \pmod 7$. Když $d_0 \equiv 1 \pmod 7$, tak $y \equiv 2 \pmod 7$ a $d_1 \equiv 2^5 - 1 = 31 \equiv 3 \pmod 7$. V ani jednom případě nedostáváme vyhovující d_1, takže rovnice nemá řešení.