5. soutěžní série – řešení

1. Dokážeme tvrzení indukcí podle n. Pokud $n = 1$, tak Ježíšek neprohodí nic a výsledná permutace se sestává z jediného 1-prvkového cyklu. Předpokládejme dále, že $n > 1$ a pro předchozí hodnoty máme tvrzení dokázané. Odebereme ze stromu hranu, kterou Ježíšek použil jako poslední. Tím se strom rozpadne na dva, a dosavadní permutace se z indukčního předpokladu skládá ze dvou cyklů $(o_1, \ldots, o_k)$ a $(o_{k+1}, \ldots, o_n)$. Hrana BÚNO spojuje vrcholy o_1 a o_{k+1}. Po provedení transpozice (o_1, o_{k+1}) vyjde permutace cyklus $(o_1, \ldots, o_n)$, což jsme chtěli dokázat.

2. Pro spor předpokládejme, že tak přepravku vyskládat lze. Pro objemy dárků až do 17 spočteme, kolik nejvýše může být v přepravce dárků s tímto objemem, a jaký mohou nejvýše zaujímat celkový objem.

Objem	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Počet	3	3	6	3	9	3	9	6	9	0	15	0	6	6	12	0
Celkem	6	9	24	15	54	21	72	54	90	0	180	0	84	90	192	0

Odmyslíme si nyní od dárků jejich tvar a ukážeme, že se do krychle prostě nevejdou. Z tohoto hlediska stačí ukázat, že se do přepravky nevejde 100 dárků za předpokladu, že je tam dáváme od nejmenšího a v co největším množství. Během umísťování dárků do objemu 17 jich umístíme 90 a zaplníme tím 891 objemu. Další dárky mají objem alespoň 18 a v přepravce zbývá 109 volného místa. Takových dárků se tam ale vejde jenom 6, takže se do přepravky vejde nejvýše 96, což je spor s tím, že jich má být 100.

3. Platí $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + a_{n-1}^{-2}$. Odtud snadno plyne dolní odhad, protože $a_{1000}^2 > a_0^2 + 1000 \cdot 2 = 2025 = 45^2$. K hornímu odhadu využijeme

$$\frac{1}{a_n^2} \le \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{a_n - a_{n-1}} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = a_{n-1} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) < a_n \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right).$$

Tedy,

$$a_n^2 \le a_0^2 + 2n + \frac{1}{a_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) \le 2025{,}05 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1} \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) \le 2025{,}05 - 1 + \frac{a_n}{5}$$

a vyřešením kvadratické nerovnice získáme

$$a_n < \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{25} + 4 \cdot 2024{,}05} < \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 2025} = 45{,}1$$

4. Ukážeme, že číslo

$$N = 10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$$

je složené pro každé n. Nechť $n = 2^m k$, kde k je liché, pak

$$10^{2^m j} \equiv (-1)^j \mod 10^{2^m} + 1$$

pro každé j přirozené. Dále platí $10^n > n \ge 2^m \ge m + 1$. Jistě 10^n je dělitelné 2^n a tedy i 2^{m+1} a podobně 10^{10^n} je dělitelné 2^{10^n} a tedy 2^{m+1}. Tedy

$$N \equiv 1 + 1 + (-1) + (-1) \equiv 0 \mod 10^{2^m} + 1$$

a protože $N > 10^{10^n} > 10^{2^m} + 1$, je N číslo složené.