4. soutěžní série

7. 12. 2015

Úloha 1. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{nsn}(1, 2, \ldots, \lfloor n/i \rfloor).$$

Úloha 2. Buď F_n n-té Fibonacciho číslo ($F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$ atd.). Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ je polynom $F_n x^{n+1} + F_{n+1} x^n - 1$ ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$, tj. nelze rozložit na součin dvou nekonstantních polynomů s celočíselnými koeficienty.

Úloha 3. Buď $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ taková, že $\lim_{x \to c+} f(x)$ a $\lim_{x \to c-} f(x)$ existují a jsou konečné pro všechna $c \in (a, b)$. Může být množina bodů nespojitosti funkce f nespočetná?

Úloha 4. Je-li $S \subseteq \mathbb{N}_0$ a $n \in \mathbb{N}_0$, označíme $r_S(n)$ počet uspořádaných dvojic (k, l), které splňují $k, l \in S$, $k \neq l$ a $k + l = n$. Je možné rozložit $\mathbb{N}_0$ na takové dvě množiny A, B (tj. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}_0$), že $r_A(n) = r_B(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$?

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`