4. domácí série

30. 11. 2015

Úloha 1. Dokažte, že každé racionální číslo lze zapsat jako podíl, kde čitatel i jmenovatel jsou tvořeny součiny několika faktoriálů prvočísel (ne nutně různých). Např. $\frac{10}{9} = \frac{2!5!}{3!3!3!}$.

Úloha 2. Nechť A, B, C, D jsou reálné $n \times n$ matice, přičemž A je regulární. Ukažte, že pokud má $2n \times 2n$ matice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

hodnost n, pak $D = CA^{-1}B$.

Úloha 3. (seriál) Nechť $p_1, p_2, \dots p_n$ jsou různá prvočísla vyšší než 3. Dokažte, že číslo $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ má alespoň $2^{2^{n-1}}$ dělitelů.

Úloha 4. Dokažte, že pro každou spojitou funkci $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \geq \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x$$

Úloha 5. Nechť $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ splňují $|x_i| \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ má množina

$$(\alpha, \alpha+1) \cap \left\{ \textstyle\sum_{i \in M} x_i : M \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}$$

nanejvýš $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ prvků.

Úloha 6. Nechť ABC různostranný ostroúhlý trojúhelník, I, H, O postupně jeho vepsiště, průsečík výšek a opsiště. Předpokládejme, že $|IO| = |IH|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a IHO mají stejný poloměr.

Bonus. Pro $n \in \mathbb{N}$ buď $\nu_n = k$, jestliže n je dělitelné 3^k, ale už ne 3^{k+1}. Definujme rekurentně posloupnost $X_1 = 2$, $X_n = 4\nu_n + 2 - \frac{2}{X_{n-1}}$ pro $n \geq 2$. Ukažte, že každé kladné racionální číslo se v posloupnosti $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytne právě jednou.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`