3. soutěžní série – řešení

1. Myšlenka je jednoduchá: čísla, která jsou moc velká nebo moc malá, musí být v posloupnosti umístěna hodně daleko, aby jejich n-tá odmocnina byla blízko jedničky. Než se dostanu k velkým n, budu do posloupnosti dávat čísla blízká onomu hromadnému bodu. Zapsat pořádně tuto myšlenku lze třeba takto:

Seřaďme prvky množiny do posloupnosti x_n a kladný hromadný bod označme a. Buď $A > 1$ takové, že $1/A < a < A$. V n-tém kroku obsadíme pozici a_n prvním dosud nepoužitým číslem z x_n, které leží v $((1/A)^{\sqrt{n}}, A^{\sqrt{n}})$ (takové vždy existuje!). Tak bude každé číslo z x_n jednou umístěno, protože $(1/A)^{\sqrt{n}} \to 0$ a $A^{\sqrt{n}} \to +\infty$. Zároveň

$$1 \leftarrow \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} < \sqrt[n]{a_n} < A^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

2. Ukážeme, že bijekce f existuje právě tehdy, když n není čtverec. Je-li $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, pak $0 > -n^3 = f(n)^3 = f(n^3) = f(k^3)^2 > 0$, spor. Není-li n čtverec, pak existuje prvočíslo p, které se v rozkladu n vyskytuje v liché mocnině. Požadovaný předpis pak je $f(x) = (-1)^{v_p(x)}x$ pro $x \in n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $f(0) = 0$.

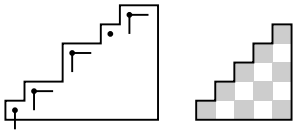
3. Vyhraje ukazovač. Řekneme, že pozice je zarovnaná, když s každým zabraným políčkem jsou zabraná i všechna políčka nad ním a vlevo od něj. Strategií ukazovače bude udržovat pozici zarovnanou (s případným použitím vynucených tahů). Vynuceným tahem rozumíme takový, ve kterém má pokládač právě jednu možnost, jak položit kostičku.

Když je pozice zarovnaná, tak mají zbývající volná políčka tvar „schodů“. Označme za kandidáty (na to, aby na ně ukazovač ukázal) ta volná políčka, která vlevo ani nad sebou nemají volné políčko. Řekneme, že kandidát K *má přípustný tah doprava*, pokud políčko vpravo nahoře od K není volné. Podobně řekneme, že kandidát *má povolený tah dolů*, pokud políčko vlevo dole od K není volné nebo je to opět kandidát.

Kandidát nejvíce vlevo určitě smí dolů, kandidát nejvíce nahoře určitě smí doprava. Kdykoli uvážíme dva sousední kandidáty K_1, K_2 (při seřazení zleva doprava), tak K_1 má povolený tah doprava nebo K_2 má povolený tah dolů. Z toho plyne, že povolených tahů je ostře víc než kandidátů.

Řekneme, že kandidáti jsou propojení, pokud sousedí rohem. Uvažme komponentu souvislosti v propojenosti, která má víc povolených tahů než kandidátů, to bude komponenta, do které ukazovač zahraje. Pokud vpravo od nejpravějšího kandidáta není volné políčko, zahraje ukazovač sérii vynucených tahů odshora dolů. V opačném případě zahraje do levého políčka a za předpokladu, že pokládač položí kostičku doprava, zahraje ukazovač sérii vynucených tahů zleva doprava.

Ještě poznamenáme, proč se nemůže stát, že by když nejpravější kandidát komponenty vynucoval tah dolů a současně nejlevější vynucoval tah doprava. (to by série vynucených tahů shora dolů nefungovala) Jenže pak by musely mít schody jednoznačný (až na velikost) pravidelný šikmý tvar. Když v takovém případě obarvíme šachovnicově políčka tak, že kandidáty obarvíme černě, tak bude černých políček víc než bílých. Avšak odebíráním domin z šachovnici se sudým rozměrem taková situace nemůže nastat.



První obrázek ilustruje kandidáty a jejich povolené tahy. Druhý šachovnicově obarvené schody, které nemohou nastat.

4. Neexistuje. Předně $P(x) - x$ má kořen $3 + \sqrt{5}$, a jelikož má celočíselné koeficienty, musí mít i $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$-sdružený kořen $3 - \sqrt{5}$; tedy $P(x) = x + (x^2 - 6x + 4)Q(x)$, přičemž Gaussovo lemma zaručuje $Q \in \mathbb{Z}[x]$. Užitím první rovnosti ze zadání pak $1 = (2 - 4\sqrt{3})Q(1 + \sqrt{3})$, což ovšem není možné: $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$-norma levé strany je jedna, pravé $(-44) \cdot \nu_{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}(Q(1 + \sqrt{3}))$, avšak $\nu_{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}(Q(1 + \sqrt{3}))$ je celé číslo – spor.