2. soutěžní série – řešení

1. Trojúhelník se stranami 3, 4, 5 jistě dokážeme do roviny umístit požadovaným způsobem, stačí tedy ukázat, že délka AB nemůže být 1 ani 2. Dokazujme sporem, mějme tedy nejprve trojúhelník ABC takový, že $|AB| = 1$. Pak A, B jsou sousední mřížové body. Trojúhelníková nerovnost nám říká $||AC| - |BC|| < 1$, tj. $|AC| = |BC|$ (jedná se o celá čísla), pak ale C leží na ose úsečky AB a máme spor (C nemůže být mřížový bod).

Mějme nyní takový trojúhelník ABC, že $|AB| = 2$ a BÚNO $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (x, y)$. Opět použijeme trojúhelníkovou nerovnost a dostaneme, že $\sqrt{x^2 + y^2}$ a $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ jsou celá čísla, která se liší o méně než 2, tj. o 1 nebo o 0. Protože čísla pod odmocninami mají stejnou paritu, také odmocniny mají stejnou paritu, tedy se liší o 0 a C opět leží na ose úsečky AB, tj. $x = 1$. Pak ale $y^2 + 1$ musí být čtverec přirozeného čísla, což je pravda jen pro $y = 0$, spor s nekolinearitou.

2. Existuje. Je-li $0 \neq x = p/q$ zlomek v základním tvaru ($q \in \mathbb{N}$), položme $\varphi(x) = 1/q$ a $\varphi(0) = 1$. Nerovnost $\varphi(x)\varphi(y) \leq |x - y|$ je pro $x \neq y$ zřejmě splněna. Máme-li zadán nenulový zlomek p/q v základním tvaru, pak z nesoudělnosti p a q existují (rovněž nesoudělná) celá čísla r, s taková, že $ps - qr = 1$, neboli $\varphi(p/q)\varphi(r/s) = |p/q - r/s|$. Takových dvojic (r, s) navíc existuje nekonečně mnoho, protože i dvojice $(r + kp, s + kq)$ vyhovuje ($k \in \mathbb{Z}$). Pro nulu rovnost nastává s čísly $1/n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

3. Označme prvního hráče $\mathbb{A}$ a druhého $\mathbb{B}$. Cílem $\mathbb{B}$ je ve svém tahu vyrobit někde v tabulce *past* $T\square\square T$ ($\square$ značí prázdné políčko); jakmile někdy $\mathbb{A}$ zahraje mezi tato dvě T, tak tímto tahem určitě nevyhraje a navíc to $\mathbb{B}$ následně vždy umí doplnit na TNT. Tuto past umí vyrobit např. vždy tak, že po prvním tahu $\mathbb{A}$ umístí první T dostatečně daleko od prvního umístěného písmene a při případném druhém tahu $\mathbb{A}$ „příliš blízko“ dá druhé T na opačnou stranu (nebo zkompletuje TNT, pokud to lze).

Nyní ukážeme, že $\mathbb{B}$ může hru protahovat tak dlouho, dokud nepřinutí zahrát $\mathbb{A}$ někam dovnitř pasti: Pokud po nějakém tahu $\mathbb{A}$ může $\mathbb{B}$ zkompletovat TNT, udělá to. Pokud ne, vezme si nějaké zatím volné políčko $\mathcal{X}$ vně pasti; pokud jsou sousední políčka volná nebo aspoň jedno obsahuje N, do $\mathcal{X}$ napíše N; pokud nějaké sousední obsahuje T ale žádné N, napíše do $\mathcal{X}$ T. Takto nikdy nevyprodukuje bezprostředně vyhrávací situaci pro $\mathbb{A}$, takže pokud by $\mathbb{A}$ někdy zkompletoval TNT, nemůže při tom použít poslední zahrané políčko $\mathbb{B}$ – ale to by pak už mohl vyhrát $\mathbb{B}$ v předcházejícím tahu.

Protože je celkový počet políček sudý, po případném vyčerpání všech polí vně pasti bude na tahu $\mathbb{A}$, tedy vyhraje $\mathbb{B}$.

4. Předpokládejme pro spor, že integrál konverguje. Rozmysleme si, že pak pro $a > 0$ platí:

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{f(a+1)}{f(a)} \leq \frac{1}{f(a)} \int_a^{a+1} f(x)dx &= \frac{1}{f(a)} \int_a^{+\infty} (f(x) - f(x+1))dx \\
&\leq \int_a^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx.
\end{aligned}
$$

Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z monotonie f a třetí rovnost plyne z toho, že primitivní funkce k $f(x) - f(x+1)$ jde k 0 (protože $f(x) \to 0$). Pošleme-li nyní a do nekonečna, integrál napravo jde k nule, tedy i $\frac{f(a+1)}{f(a)} \to 0$, tj.

$$\frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} \to 1,$$

což je spor s tím, že integrál konverguje.

Poznámka: existují i méně triková řešení, ve kterých se integrál napíše jako součet integrálů přes intervaly délky 1.