2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 2. 11. 2015.

Úloha 1. Nechť a, b jsou nenulová reálná čísla. Uvažme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q}, \\ bx, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dokažte, že f je prostá právě tehdy, když je na $\mathbb{R}$.

Úloha 2. Mají-li spojité funkce $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ a $g : \mathbb{R} \to (-\infty, 0]$ pevné body, pak také funkce $f + g$ má pevný bod. Pevný bod funkce h je každé číslo $x_0 \in D_h$, pro které $h(x_0) = x_0$.

Úloha 3. Vyřešte v reálných číslech soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) &= 2, \\ (1 + 2x_1)(1 + 2x_2) \dots (1 + 2x_n) &= 3, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad &\vdots \; \vdots \\ (1 + nx_1)(1 + nx_2) \dots (1 + nx_n) &= n + 1. \end{aligned}$$

Úloha 4. (seriál) Nechť p je prvočíslo a k nezáporné celé číslo. Dokažte, že polynom

$$f(x) = 1 + x^{p^k} + x^{2p^k} + \dots + x^{(p-1)p^k}$$

nelze rozložit na součin dvou nekonstantních polynomů s racionálními koeficienty.

Úloha 5. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ označme $f(m, n)$ počet n-tic $(x_1, \dots, x_n)$ celých čísel splňujících $|x_1| + \dots + |x_n| \le m$. Ukažte, že $f(m, n) = f(n, m)$.

⋆ **Úloha 6.** Buď $n \in \mathbb{N}$ a A reálná $n \times n$ matice. Označme $A^{[k]}$ matici, která vznikla z A umocněním každé souřadnice na k-tou (k přirozené). Dokažte, že pokud $A^{[k]} = A^k$ pro $k = 1, 2, \dots, n + 1$, pak $A^{[k]} = A^k$ pro všechna přirozená k.
