1. soutěžní série

12. 10. 2015

Úloha 1. Na sociální síti Gesichtbuch se mohou uživatelé libovolně přátelit (přátelství je symetrické). Bylo vypozorováno, že mezi každými čtyřmi uživateli vždy existuje jeden, který je přítelem zbývajících tří. Dokažte, že mezi každými čtyřmi uživateli dokonce vždy existuje jeden, který je přítelem všech ostatních uživatelů Gesichtbuchu.

Úloha 2. Komplexní čísla a, b, c splňují $|a| = |b| = |c| = r > 0$. Dokažte, že

$$\left|\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}\right| = r.$$

Úloha 3. Existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která nemá pevný bod a zároveň pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) - f^n(y) = 0?$$

Symbol f^n značí n-krát složenou funkci f, pevný bod funkce f je číslo x_0 splňující $f(x_0) = x_0$.

Úloha 4. (seriál) Buď $f(x) \cdot g(x)$ rozklad polynomu $x^n + m$ ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$) na dva polynomy s celočíselnými koeficienty. Dále mějme prvočíslo p, které dělí $f(a)$ i $g(a)$ pro (alespoň) jedno pevné celé číslo a. Dokažte, že $p \mid mn$.