1. soutěžní série – řešení

1. Sporem: nechť A, B, C, D jsou čtyři uživatelé, mezi kterými se nenachází žádný přítel všech. Pokud (BÚNO) A není přítel M a B není přítel N, kde $M \neq N$, pak ve skupině A, B, M, N není nikdo, kdo by byl přítelem zbývajících tří. Pokud naopak ani jeden z A, B, C, D není přítelem jednoho konkrétního M, pak skupina A, B, C, M dává požadovaný spor.

2. BÚNO $r = 1$, chceme dokázat $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$, neboli

$$(ab + bc + ca)\overline{(ab + bc + ca)} = (a + b + c)\overline{(a + b + c)}$$

(pruh značí komplexní sdružení). Tato rovnost se snadno ověří roznásobením a využitím předpokladu $a\overline{a} = 1$, $b\overline{b} = 1$, $c\overline{c} = 1$.

3. Taková funkce existuje, příkladem může být například funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 1/x & \text{pro } x \in [1, \infty) \\ x + 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

Tato funkce je rostoucí (snadno ověříme pomocí derivace na jednotlivých částech) a splňuje $f(x) > x$. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \infty.$$

To ukážeme sporem. Posloupnost je rostoucí tedy kdyby neměla limitu ∞, bude shora omezená mezí m, můžeme předpokládat $m > 1$. Pak ale pro každé n je $f^{n+1}(x) - f^n(x) \geq 1/m$, což je spor s tím, že je posloupnost $f^n(x)$ shora omezená. Nyní dokážeme vlastnost ze zadání. Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$, BÚNO $x \leq y$. Z dříve ukázaného dostáváme existenci n_0 takového, že $f^{n_0}(x) \geq y$. Protože je f rostoucí, platí pro každé přirozené n

$$f^n(x) \leq f^n(y) \leq f^{n+n_0}(x).$$

Přitom můžeme spočítat

$$\lim_{n\to\infty} (f^{n+n_0}(x) - f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{f^{n+n_0-1}(x)} + \cdots + \frac{1}{f^n(x)} \right) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{n_0}{f^n(x)} = 0.$$

Takže i $\lim_{n\to\infty}(f^n(x) - f^n(y)) = 0$.

4. Celou dobu budeme pracovat v tělese $\mathbb{Z}_p$. Polynomy f a g mají kořen a, takže polynom $x^n + m$ má dvojnásobný kořen a. Je tedy možné jej zapsat jako

$$x^n + m \equiv (x - a)^2 \cdot h(x),$$

kde $h \in \mathbb{Z}_p[x]$. Použijeme na tuto rovnici (algebraickou) derivaci:

$$nx^{n-1} \equiv (x - a)(\cdots).$$

Dosadíme-li $x = a$, bude pravá strana nulová, tedy i levá strana. Pokud $n \equiv 0$ v $\mathbb{Z}_p$, tak to znamená $p \mid n$, takže $p \mid nm$, což jsme chtěli. V opačném případě $a = x \equiv 0$ a po dosazení do původní rovnice dostáváme $m \equiv 0$, takže opět $p \mid nm$.