1. domácí série

v týdnu od 21. 10. 2015

Úloha 1. Na kružnici jsou napsána (všechna přirozená) čísla od jedné do $N > 1$ takovým způsobem, že každá dvě sousední čísla mají (ve svých dekadických zápisech) aspoň jednu společnou cifru. Určete nejmenší N, pro které je to možné.

Úloha 2. Najděte nenulový polynom P dvou proměnných splňující $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$ pro všechna reálná čísla a. $\lfloor a \rfloor$ značí celou část čísla a.

Úloha 3. Pro každé přirozené číslo $n \geq 10$ ukažte, že mezi n a $3n$ leží třetí mocnina nějakého přirozeného čísla.

Úloha 4. Ukažte, že pro každé přirozené n existuje právě jedno reálné a_n splňující $e^{a_n} + na_n = 2$. Vypočtěte $\lim\limits_{n \to \infty} n(1 - na_n)$.

Úloha 5. Uvažujme řetězec 54 jednotkových čtverců, kde každý čtverec je připojen ve dvou protilehlých vrcholech ke dvěma sousedům (tj. takto: $\diamond\diamond\diamond$), kromě prvního a posledního čtverce, které mají jen jednoho souseda. Je možné tímto řetězcem pokrýt povrch krychle $3 \times 3 \times 3$?

Úloha 6. Pro $n \geq 4$ vyberme náhodně n bodů na jednotkové kružnici. Tyto body tvoří vrcholy konvexního n-úhelníka. Jaká je pravděpodobnost, že tento n-úhelník bude mít aspoň jeden ostrý úhel?

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`