5. soutěžní série

15. 12. 2014

Úloha 1. Množinu $n+2$ bodů v $\mathbb{R}^n$ lze rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny tak, že konvexní obaly těchto dvou podmnožin mají neprázdný průnik. Dokažte.

Úloha 2. (Seriál 1) Buď $a : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ spojitá funkce splňující $\int_0^{+\infty} a(x)dx = +\infty$ a $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce splňující

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + \frac{f'(x)}{a(x)} \right) = 0.$$

Ukažte, že

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Úloha 3. Buď (X, ϱ) metrický prostor a $f \colon X \to X$ isometrie (tj. splňuje $\varrho(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$). Dokažte, že pro všechna $x \in X$ existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varrho(x, f^n(x))}{n}$$

($f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$) a nezávisí na volbě x.

Úloha 4. (Seriál 2) Dokažte pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} 2^k = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`