5. domácí série

8. 12. 2014

Úloha 1. Pětiprvková množina kladných reálných čísel splňuje, že kdykoli z ní vybereme tři různá čísla a, b, c, je číslo $ab + bc + ca$ racionální. Dokažte, že poměr každých dvou čísel této množiny je také racionální.

Úloha 2. Matice A, jejíž každá položka je rovna 0 nebo 1, má nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ hodnost k. Jakou nejvyšší možnou hodnost může mít A nad $\mathbb{R}$?

Úloha 3. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n)^2}.$$

Úloha 4. Letecká společnost Usual Airlines umožňuje vzít na palubu zavazadla ve tvaru kvádru $a \times b \times c$, pokud $a+b+c \leq 100\,cm$. Je možné zabalit zavazadlo, které tuto podmínku nesplňuje, do nějakého většího, které však tuto podmínku splňuje? Tj. rozhodněte, zda platí pro každé dva kvádry B, $C \subset \mathbb{R}^3$ implikace $B \subset C \Rightarrow l(B) \leq l(C)$, kde l přiřadí kvádru o velikosti $a \times b \times c$ číslo $a + b + c$.

Úloha 5. Nechť $f(x_1, \ldots, x_n)$ je polynom n proměnných nad tělesem $\mathbb{Z}_{13}$ stupně ostře menšího než n. Dokažte, že počet n-tic

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_{13}^n,$$

takových, že $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{13}$, je dělitelný třinácti.

Úloha 6. (Seriál 1) Ukažte, že neexistuje reálná funkce z definovaná na celém $[0, +\infty)$ splňující $(z'(t))^2 z(t) - (z'(t))^3 + (z(t))^4 + 1 = 0$ pro všechna $t \geq 0$.