4. domácí série

24. 11. 2014

Úloha 1. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálná posloupnost, $a_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Pokud $(a_n + 1/a_n)$ konverguje, pak také (a_n) konverguje. Dokažte.

Úloha 2. *Rozpadem* čísla $n \in \mathbb{N}$ nazveme neuspořádanou k-tici přirozených čísel, jejichž součet je n. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$ s náledující vlastností: Existuje rozpad R čísla n různý od n jedniček takový, že každé číslo z množiny $\{1, \ldots, n\}$ lze vyjádřit jednoznačně jako součet prvků z R.

Úloha 3. (Seriál 1) Buď $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dvakrát diferencovatelná funkce splňující $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = 1$ a pro všechna $x \geq 0$

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) \geq 1.$$

Dokažte pro $x \geq 0$ nerovnost

$$f(x) \geq e^{2x} - e^{x} + \frac{1}{2}.$$

Úloha 4. Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ platí, že existuje grupa s právě n podgrupami indexu 2. Dokažte, že pak existuje i konečná komutativní grupa s právě n podgrupami indexu 2.

Úloha 5. Najděte všechna prvočísla p taková, že existuje matice $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$, $A \neq E_2$ splňující $A^p + A^{p-1} + \cdots + A = pE_2$. E_2 je jednotková matice 2×2.

Úloha 6. Najděte nejmenší $K > 0$ takové, že každá konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ míry 1 je obsažena v nějakém n-rozměrném kvádru míry K (s hranami ne nutně rovnoběžnými s osami).