3. domácí série

10. 11. 2014

Úloha 1. Nechť a, b jsou přirozená čísla. Ukažte, že $(15a+b)(15b+a)$ není mocnina trojky.

Úloha 2. Buď $f\colon [0,1] \to [0,1]$ spojitá a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost splňující $x_{n+1} = f(x_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že x_n konverguje, právě když $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

Úloha 3. (Seriál 2) Pro $m, n \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ a $s \in \mathbb{R}$ dokažte

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}.$$

Úloha 4. Alžběta si koupila $2n+1$ grepů ($n \in \mathbb{N}$). Doma zjistila, že kdykoliv některý z grepů dá stranou, zbývajících $2n$ grepů může rozdělit na dvě skupiny po n grepech o stejné hmotnosti. Dokažte, že všechny Alžbětiny grepy jsou stejně těžké.

Úloha 5. (Seriál 1) Buď $P\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ spojitá lichá funkce a $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ diferencovatelná shora omezená funkce splňující pro všechna $x \geq 0$ nerovnost

$$\sqrt[3]{f^2(x)+1}\,f'(x) \geq P(\cos x).$$

Ukažte, že $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existuje, právě když $P \equiv 0$.

Úloha 6. Mějme $n \geq 3$ bodů v rovině, z nichž žádná trojice neleží na jedné přímce, a označme E množinu všech úseček spojujících tyto body. Řekneme, že trojice úseček *tvoří trojúhelník*, pokud jejich délky splňují ostrou trojúhelníkovou nerovnost. Ukažte, že E lze rozložit na trojice tvořící trojúhelníky (v případě, že počet hran není dělitelný třemi, tak po odebrání jedné libovolné hrany).

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`