

## 2. soutěžní série

20. 10. 2014

**Úloha 1.** Která přirozená čísla lze vyjádřit jako součet několika (alespoň dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel?

**Úloha 2. (Seriál 1)** Buď  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  omezená a diferencovatelná funkce splňující  $f^2(x)f'(x) \geq \sin x$  pro všechna  $x \geq 0$ . Ukažte, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

neexistuje.

**Úloha 3.** Do nekonečné čtverečkové sítě umístíme 111 nějak otočených nepřekrývajících se *L-trimin* (kostek tvaru  $\boxplus$ ) tak, že každý  $2 \times 2$  čtverec zcela obsahující nějaké L-trimino je L-triminy zcela pokryt. Dokažte, že pak můžeme nějaký počet L-trimin (alespoň jedno, ale ne všechna) odebrat tak, že tato vlastnost zůstane zachována.

**Úloha 4.** Buď  $R$  konečný komutativní okruh (ne nutně s jednotkou), jehož každý prvek je součinem nějakých dvou prvků. Ukažte, že  $R$  má jednotku.