5. domácí série

úlohy budou předváděny na semináři 16. 12. 2013

Úloha 1. Nechť S_1, S_2 jsou dvě kostry téhož (konečného) souvislého grafu G. Dokažte, že existuje posloupnost koster G

$$S_1 = T_1, T_2, \ldots, T_n = S_2$$

taková, že T_{i+1} vznikne z T_i odebráním nějaké hrany a spojením dvou nespojených vrcholů hranou z G.

Úloha 2. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou klesající posloupnosti reálných čísel, které splňují

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Rozhodněte, zda pak už musí platit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = +\infty.$$

Úloha 3. Buď $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud ke všem prvkům reálné antisymetrické $2n \times 2n$ matice přičteme totéž číslo, její determinant se nezmění.

Úloha 4. V trojúhelníku ABC označme a, b, c délky stran protilehlých k vrcholům A, B, C a dále m délku těžnice příslušné vrcholu A, l délku osy úhlu u vrcholu B a h délku výšky spuštěné z vrcholu C. Ukažte, že trojúhelník ABC je rovnostranný právě tehdy, když $a^2+m^2 = b^2+l^2 = c^2 + h^2$.

Úloha 5. Ukažte, že Taylorova řada funkce

$$g(z) = 1 - \frac{3}{\frac{1}{1-az} + \frac{1}{1-iz} + \frac{1}{1+iz}}$$

v bodě 0 má všechny koeficienty nezáporné, právě když $a \geq \sqrt{3}$.

Úloha 6. Rozhodněte, zda platí: každý graf s množinou vrcholů $\mathbb{R}$ má indukovaný podgraf na nespočetně mnoha vrcholech, který je buď úplný, nebo je tvořen pouze izolovanými vrcholy.