4. soutěžní série

25. 11. 2013

Úloha 1. Pro všechna $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ dokažte $\det A_{m,n} = 1$, kde $A_{m,n}$ značí $m \times m$ matici, jejíž (i,j)-tý prvek je roven $\binom{n+i}{j-1}$.

Úloha 2. Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+2} - a_n) = 0.$$

Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} - a_n}{n} = 0.$$

Úloha 3. Kolik nejméně vnitřních úseček délky 1 musíme vymazat z tabulky 2000×3000, aby jediným zbylým obdélníkem byl ten největší?

Úloha 4. Buď $n \in \mathbb{N}$ a p prvočíslo. Ukažte, že následující polynom je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$:

$$f(x) = p + \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

výsledky na `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`