3. domácí série

úlohy budou předváděny na semináři 18. 11. 2013

Úloha 1. Řešte v komplexních číslech rovnici

$$(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5) = 360.$$

Úloha 2. Osmnáctiúhelník, který je vepsán do kružnice, má polovinu stran délky 11 a druhou polovinu stran délky 2013. Najděte poloměr kružnice opsané.

Úloha 3. Označme $a(n)$ celé číslo, které je nejblíž k $\sqrt{n}$. Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a(n)} + 2^{-a(n)}}{2^n}.$$

Úloha 4. Nechť grupy A, B, C splňují, že $A \times B$ je isomorfní $A \times C$. Musí pak už být B isomorfní C?

Úloha 5. Buď X n-prvková množina s tříprvkovými podmnožinami $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m, n \in \mathbb{N})$, pro které platí $|A_i \cap A_j| \leq 1$ pro $1 \leq i < j \leq m$. Dokažte, že existuje $Y \subseteq X$ taková, že že $|Y| \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ a $A_i \not\subseteq Y$ pro $1 \leq i \leq m$.

Úloha 6. Nechť f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. f, g jsou darbouxovské, pak $f + g$ je darbouxovská
2. f spojitá, g darbouxovská, pak $f + g$ je darbouxovská

Funkce zove darbouxovská, jestliže obrazem libovolného intervalu je zase interval.