

2. soutěžní série

21. 10. 2013

Úloha 1. Dokažte, že pokud je n třetí mocninou přirozeného čísla, pak $n^2 + 6n + 12$ není.

Úloha 2. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ splňující

$$f(f(x)) = 6x - f(x)$$

a $f(x) > 0$ pro všechna $x > 0$.

Úloha 3. Buď $G = (V, E)$ graf na n vrcholech v_1, \dots, v_n a definujme

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ \& } x_1 + \dots + x_n = 1\}.$$

Ukažte, že

$$\max_{(x_1, \dots, x_n) \in K} \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa(G)} \right),$$

kde $\kappa(G)$ značí klikovost G , tedy největší počet vrcholů úplného podgrafu G .

Úloha 4. Označme M_n množinu všech reálných matic $n \times n$. Najděte všechny funkce $f: M_n \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, které jsou na a splňují

$$f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}$$

pro všechna $X, Y \in M_n$.