1. domácí série

Úloha 1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n, pro které platí

$$\binom{m}{n} = 2013.$$

Úloha 2. V horském státě Řešistán je m měst a mezi každými dvěma vede přímá obousměrná balónová linka. Cestovatel Karel chce cestovat po Řešistánu výhradně balónem, začít a skončit chce v hlavním městě a každé ze zbývajících měst chce navštívit právě jednou. Cestou chce použít všechny linky, které průvodce označuje jako spektakulární. Kolika způsoby může Karel svůj plán uskutečnit, jestliže spektakulárních linek je s a z každého města vede nejvýše jedna?

Úloha 3. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ nalezněte nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, aby v každé sadě n čísel existovala dvě, jejichž součet nebo rozdíl je dělitelný $2k + 1$.

Úloha 4. Každý bod množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ obarvíme nějakou barvou tak, aby pro všechna $a, b, c \in \mathbb{N}$ měly body (a, b) a $(a + b, c)$ různou barvu. Dokažte, že na to budeme potřebovat nekonečně mnoho barev.

Úloha 5. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Označme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{1 + n + k}.$$

Dokažte, že rovnice $P(x^2) = P^2(x)$ nemá řešení v reálných číslech.

Úloha 6. Buď $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ matice nad racionálními čísly splňující $A^n = -E_2$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak $A^2 = -E_2$ nebo $A^3 = -E_2$ (E_2 je jednotková matice 2×2).