6. soutěžní série

22. 5. 2023

Úloha 1. Ukažte, že počet způsobů, jak lze vyjádřit $n \in \mathbb{N}$ jako uspořádaný součet jedniček a dvojek, je roven počtu způsobů, jak lze vyjádřit $n+2$ jako uspořádaný součet čísel větších než 1. (5 bodů)

Úloha 2. Je dána regulární matice $A \in M_n(\mathbb{C})$ řádu n. Najděte všechna $q \in \mathbb{C}$ taková, že existuje regulární matice $B \in M_n(\mathbb{C})$ splňující $AB - qBA = I_n$, kde I_n je jednotková matice. (10 bodů)

Úloha 3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnou AC délky 1 sestrojíme bod D ležící na AB splňující $|AD| = 1$, bod E na BC splňující $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CAB = \alpha$, průsečík kolmice na BC procházející bodem E protne AB v bodě F. Najděte $\lim_{\alpha\to 0} |EF|$. (10 bodů)

Úloha 4. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

(15 bodů)

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`