5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 15. 5. 2023.

Úloha 1. Nechť jsou dána přirozená čísla k, ℓ a kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell$ taková, že rovnost

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n = b_1^n + b_2^n + \cdots + b_\ell^n$$

nastane pro nekonečně mnoho přirozených čísel n. Ukažte, že pak $a_1 \cdot a_2 \ldots a_k = b_1 \cdot b_2 \ldots b_\ell$.

Úloha 2. Buď $n \geq 3$ přirozené číslo. Ukažte, že neexistuje permutace π na množině $\{1, 2, ..., n\}$, pro níž jsou čísla $\pi(1)$, $2\pi(2)$, $\ldots$, $n\pi(n)$ po dvou různá modulo n.

Úloha 3. Nechť body A a B tvoří průměr dané jednotkové kružnice k a bod Z nechť leží na úsečce AB. Pro přímku p procházející bodem Z označme C_p a D_p její průsečíky s kružnicí k a S_p obsah čtyřúhelníku AC_pBD_p. Určete $\max_p S_p$.

Úloha 4. Nechť A a B jsou komplexní $m \times n$ matice a C je komplexní $n \times m$ matice. Dokažte, že pokud existují nenulová komplexní čísla x a y, pro něž $ACB = xA + yB$, potom $ACB = BCA$.

Úloha 5. Pro každé $i \in \{1, 2, ..., C\}$ máme $2i$ mincí barvy i. Umístěme těchto $C(C+1)$ mincí do řady. Tah spočívá ve vyměně pozic dvou sousedních mincí. Označme m minimální počet tahů potřebných k tomu, abychom dostali rozmístění, v němž mince každé z barev tvoří souvislý úsek v řadě mincí. Ukažte, že maximální hodnota m přes všechna počáteční rozmístění je $\frac{(C-1)C(C+1)(3C+2)}{12}$.

5th home series

Solutions will be presented at the seminar on May 15, 2023.

Problem 1. Given positive integers k, ℓ and given positive real numbers $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$ satisfy the equality

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n = b_1^n + b_2^n + \cdots + b_\ell^n$$

for infinitely many positive integers n. Show that $a_1 a_2 \dots a_k = b_1 b_2 \dots b_\ell$.

Problem 2. Let $n \geq 3$ be an integer. Prove that there is no permutation π on the set $\{1, 2, ..., n\}$ such that $\pi(1)$, $2\pi(2)$, $\dots$, $n\pi(n)$ are pairwise distinct modulo n.

Problem 3. Let AB be the diameter of a given unit circle k, and let Z be a given point on AB. Denote C_p and D_p intersections of k with a line p containing Z, and denote S_p area of the quadrilateral AC_pBD_p. Find $\max_p S_p$.

Problem 4. Let A and B be complex $m \times n$ matrices, and let C be a complex $n \times m$ matrix. Prove that if there are nonzero complex numbers x and y such that $ACB = xA + yB$, then $ACB = BCA$.

Problem 5. For each i in $\{1, 2, ..., C\}$, we have $2i$ coins of color i. Place these $C(C+1)$ coins in a line. A move consists of exchanging positions of two adjacent coins. Let m be the minimum number of moves required to reach a configuration where all coins of the same color are together in a run of consecutive coins. Show that the maximum value of m over all initial configurations is $\frac{(C-1)C(C+1)(3C+2)}{12}$.