3. soutěžní série – řešení

1. Pro každá reálná $a, b, c > 0$ platí $a^{\log_a c} = c = b^{\log_b c} = a^{\log_a b \cdot \log_b c}$, čili $\log_a c = \log_a b \log_b c$. Volbou $a = 7$ a $c = -\frac{1}{7}$, dostaneme $-1 = \log_7 \frac{1}{7} = \log_7 b \log_b \frac{1}{7}$. Takže pro každé n máme $\frac{1}{\log_n \frac{1}{7}} = -\log_7 n$. Tedy $\frac{1}{\log_2 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_3 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_4 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_5 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_6 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_7 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_8 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_9 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_{10} \frac{1}{7}} = -\log_7 2 - \log_7 3 - \log_7 4 - \log_7 5 - \log_7 6 + \log_7 7 + \log_7 8 + \log_7 9 + \log_7 10 = \log_7 \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \log_7 7 = 1$. Takže odpověď je 1.

2. Uvažujme funkci $g(x) = f(x) \exp(-\operatorname{arctg}(x))$. Funkce g je diferencovatelná, $g(-1) = g(1) = 0$, a tedy podle Rolleovy věty existuje $x_0 \in (-1, 1)$, ve kterém $g'(x_0) = 0$. Ale

$$g'(x) = \exp(-\operatorname{arctg}(x)) \left(f'(x) + f(x) \frac{-1}{1 + x^2} \right),$$

a proto $f(x_0) = (1 + x_0^2) f'(x_0)$.

Jiné řešení: Nechť bez újmy na obecnosti $(1 + (-1)^2) f'(-1) - f(-1) > 0$. Pak f bude kladná na nějakém pravém okolí -1. Označme $y_1 = \sup\{y \in (-1, 1]; f(x) > 0 \, \forall x \in (-1, y)\}$ bod, kde f poprvé spadne do nuly (to bude nejpozději v $f(1) = 0$). Dle Rolleovy věty pro interval $[-1, y_1]$ najdeme $y_0 \in (-1, y_1)$, ve kterém $f'(y_0) = 0$ a $f(y_0) > 0$, tedy $(1 + y_0^2) f'(y_0) - f(y_0) < 0$. Protože derivace funkce má Darbouxovu vlastnost (nabývá mezihodnoty), musí $f'(x) - \frac{f(x)}{1+x^2}$ někde v intervalu $(-1, y_1)$ nabývat nulu.

3. Označme prvního hráče A a druhého hráče B. Indukcí ukážeme, že B vyhraje právě pro $n = 2^k, k = 1, 2, \ldots$. Nechť B umí vyhrát pro 2^k sirek. Pokud $2^k < n < 2^{k+1}$, pak A odebere $n - 2^k$ sirek. Tím se dostali do situace s 2^k sirkami, ale vyměnili si role a lze odebrat nejvýše $n - 2^k \leq 2^k - 1$ sirek. Takže tím spíš bude umět vyhrát A strategií, kterou by pro 2^k vyhrál B. Pokud $n = 2^{k+1}$ a A odebere alespoň 2^k sirek, pak B může v druhém kroku odebrat zbytek a okamžitě vyhrát. Pokud $n = 2^{k+1}$ a A odebere nejvýše $2^k - 1$ sirek, pak B může pokračovat strategií pro výhru se 2^k sirkami, tím se dostanou do situace s 2^k sirkami, na tahu bude opět A, bude možné odebrat nejvýše $2^k - 1$ sirek nebo méně, a proto bude dle indukčního předpokladu umět vyhrát B.

4. Vynásobením rovnosti zprava maticí A^* dostaneme $AA^* + (A^*)^2 = A^2 (A^*)^2$. Pak $A^2 = ((A^*)^2)^* = (A^2 (A^*)^2 - AA^*)^* = A^2 (A^*)^2 - AA^* = (A^*)^2$. Tedy $A + A^* = A^2 A^* = (A^*)^3$, a tudíž $AA^* = (A^*)^4 - (A^*)^2 = A^* A$. Tedy A je normální, čili existuje unitární matice U a diagonální matice D taková, že $A = UDU^*$. Pak z $A + A^* = A^2 A^*$ dostaneme $U(D + D^*)U^* = UD^2 D^* U^*$. Čili pro každé λ na diagonále D platí $\lambda + \overline{\lambda} = \lambda^2 \overline{\lambda}$ a chceme ukázat, že všechna taková λ jsou reálná. Pro nulové λ je to samozřejmě pravda. Pro nenulé λ můžeme $\overline{\lambda}^2 \lambda = \overline{\lambda^2 \overline{\lambda}} = \overline{\lambda + \overline{\lambda}} = \lambda + \overline{\lambda} = \lambda^2 \overline{\lambda}$ vydělit $\lambda \overline{\lambda}$ a dostat $\overline{\lambda} = \lambda$. Tedy λ je reálné, $D^* = D$ a $A = UDU^* = UD^* U^* = A^*$.