# 3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27. 3. 2023.

**Úloha 1.** Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nenulové vektory ve vektorovém prostoru $V$. Ukažte, že pokud existuje lineární zobrazení $T : V \to V$ takové, že $Tx_1 = x_1$ a $Tx_k = x_k - x_{k-1}$ pro $k > 1$, pak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislé.

**Úloha 2.** Je dána množina reálných čísel $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ukažte, že lze vybrat její neprázdnou podmnožinu $Y$ tak, aby pro nějaké celé $m$ platilo

$$\left| m + \sum_{y \in Y} y \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

**Úloha 3.** Množina řešení rovnice $y^x = x^y$ sestává z přímky $x = y$ a z další křivky. Najděte bod, v němž tato křivka protíná přímku.

**Úloha 4.** V oblasti s hranicí danou křivkou $x^2 + y^2 + xy = 6$ chodí mravenec. Pohybuje se rovnoběžně s osou souřadnic dokud nenarazí na hranici, otočí se o $90°$ a pokračuje dále vnitřkem oblasti. Ukažte, že se někdy vrátí do počáteční pozice.

⋆ **Úloha 5.** Nechť $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ a $f$ jsou nezáporná reálná čísla splňující $a + b + c = d + e + f$ a $t$ buď reálné číslo větší než 1. Dokažte, že aspoň jedna z následujících nerovností neplatí:

$$a^t + b^t + c^t > d^t + e^t + f^t,$$
$$(ab)^t + (bc)^t + (ca)^t > (de)^t + (ef)^t + (fd)^t,$$
$$(abc)^t > (def)^t.$$

# 3rd home series

Solutions will be presented at the seminar on March 27, 2023.

**Problem 1.** Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be non-zero elements in a vector space $V$. Assume there exists a linear map $T : V \to V$ such that $Tx_1 = x_1$ and $Tx_k = x_k - x_{k-1}$ for $k > 1$. Prove that $x_1, x_2, \dots, x_n$ are linearly independent.

**Problem 2.** Given $n \in \mathbb{N}$ and a set $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ of real numbers. Show that one can choose a non-empty subset $Y$ such that

$$\left| m + \sum_{y \in Y} y \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

for an appropriate integer $m$.

**Problem 3.** The set of real solutions to $y^x = x^y$ consists of a line $x = y$ and an additional curve. Find the point where this curve intersects the line.

**Problem 4.** An ant is walking in the bounded area with the boundary given by $x^2 + y^2 + xy = 6$. It moves in parallel with a coordinate axis until it meets the boundary, then it rotates $90^\circ$ and continues moving in the interior of the area. Show that it comes back to its original position in finite time.

$\star$ **Problem 5.** Suppose that $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, and $f$ are nonnegative real numbers that satisfy $a + b + c = d + e + f$. Let $t$ be a real number greater than 1. Prove that at least one of the inequalities

$$a^t + b^t + c^t > d^t + e^t + f^t,$$
$$(ab)^t + (bc)^t + (ca)^t > (de)^t + (ef)^t + (fd)^t,$$
$$(abc)^t > (def)^t$$

is false.

---