

2. soutěžní série

6. 3. 2023

Úloha 1. Sedm spolužáků z jedné třídy má prázdniny. Každý z nich během prázdnin poslal pohled přesně třem spolužákům. Mohlo se stát, že každý žák dostal pohled právě od těch spolužáků, kterým poslal pohled? (5 bodů)

Úloha 2. Pro $n \geq 2$ vepíšeme čísla $1, 2, \dots, n^2$ nějakým způsobem do matice $n \times n$, každé jednou. Určete minimální a maximální možnou hodnotu takové matice. (10 bodů)

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ splňující

$$f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_5(1^1 2^2 3^3 \dots n^n)}{n^2},$$

kde $\nu_5(k)$ je exponent u pětky v prvočíselném rozkladu čísla k .¹

(15 bodů)

¹Tedy např. $\nu_5(7) = \nu(5^0 \cdot 7) = 0$, $\nu_5(135) = \nu_5(5^1 \cdot 27) = 1$ a $\nu_5(75) = \nu(5^2 \cdot 3) = 2$.
web: <http://karlin.mff.cuni.cz/resitel>