

## 6. soutěžní série

9. 5. 2022

**Úloha 1.** Dva hráči mají před sebou miskou s  $n$  bombóny a hrají následující hru. Každý hráč ve svém tahu zvolí přirozené  $k$  nesoudělné s aktuálním počtem bombónů v misce a sní  $k$  bombónů. Hráči se střídají v tazích. Vyhrává ten, který sní poslední bombón. V závislosti na  $n$  určete, který z hráčů má vyhrávající strategii. (5 bodů)

**Úloha 2.** Najděte všechna prvočísla, pro která je  $p - 4$  čtvrtou mocninou přirozeného čísla. (10 bodů)

**Úloha 3.** Nechť  $f$  a  $g$  jsou spojité funkce na  $[a, b]$ . Dokažte, že

$$f(x) \int_a^x g(t) dt = g(x) \int_x^b f(t) dt$$

má nějaké řešení  $x \in (a, b)$ . (10 bodů)

**Úloha 4.** Matice  $A$  řádu  $n$  má  $n + 1$  vlastních vektorů takových, že libovolná  $n$ -tice je lineárně nezávislá. Plyne odtud, že  $A$  je násobkem jednotkové matice? (15 bodů)