6. soutěžní série - řešení

1. První hráč vyhraje, právě když n je liché. Pro $n = 1$ vyhraje hned prvním tahem. Je-li $n > 1$ liché, sní první hráč v prvním tahu $n - 2$ bonbónů a dalším tahem vyhraje. Je-li n sudé, musí sníst první hráč lichý počet bonbónů. V misce pak zůstane lichý počet a druhý hráč, který je nyní na tahu, má tedy vyhrávající strategii.

2. Pišme $p = k^4 + 4 = (k^2 + 2)^2 - 4k^2 = (k^2 + 2 - 2k)(k^2 + 2 + 2k)$. Obě závorky jsou kladné, jedna z nich je tedy rovna 1, nutně ta menší, tj. $k^2 + 2 - 2k = 1$. Odtud $k = 1$, a tedy $p = 5$.

3. Hledáme takové x, pro které je $0 = g(x) \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t - f(x) \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. To je derivací funkce $h(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, která je spojitě diferencovatelná, $h(a) = h(b) = 0$. Dle Rolleovy věty hledané x existuje.

4. Označme vlastní vektory $v_1, \ldots, v_{n+1}$ a odpovídající vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$. Pokud vynecháme i-tý vektor, zůstane nám n lineárně nezávislých vektorů tvořící bázi $\mathbb{R}^n$. Matice A je proto diagonalizovatelná, přičemž matice podobnosti má ve sloupcích vektory $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}$ a diagonální matice má na diagonále odpovídajíci vlastní čísla. Speciálně vidíme, že stopa A je $(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j) - \lambda_i$. Tento argument platí pro všechna i, tedy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1}$. Diagonalizovatelná matice s jediným vlastním číslem je násobkem jednotkové matice.

Jiné řešení: Součet geometrických násobností vlastních čísel A je nejvýše n. Pro některé vlastní číslo λ_k musíme mít více vlastních vektorů, než je jeho násobnost l. Pokud by byla menší než n, pak bychom mohli vybrat $l + 1 \leq n$ lineárně závislých vektorů, spor. Matice musí mít vlastní číslo s geometrickou násobností n, tedy bude násobkem jednotkové matice.