

## 6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 16. 5. 2022.

**Úloha 1.** Čtyři body  $ABCD$  leží na kružnici v tomto pořadí. Tečnu v bodě  $C$  označíme jako  $t$ . Přímkou symetrickou s  $AB$  dle přímky  $AC$  označíme  $s$ . Nechť  $G$  je průsečík  $AC$  a  $BD$  a nechť  $H$  je průsečík  $CD$  a  $s$ . Ukažte, že  $GH \parallel t$ .

**Úloha 2.** Nalezněte všechna celá čísla  $x, y$  taková, že

$$3x^2 + 10x + 5 = 9 \cdot 2^y.$$

**Úloha 3.** Mějme posloupnost  $x_n = \pm \frac{1}{n}$ , kde  $x_n$  a  $x_{n+6}$  mají stejná znaménka pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Ukažte, že pokud jsou právě tři z  $x_1, \dots, x_6$  kladná, pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konverguje. Platí i opačná implikace?

**Úloha 4.** Nechť  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  a  $A$  je komplexní čtvercová matice řádu  $n$ , pro kterou platí  $\text{tr} A \neq 0$ . Pokud platí  $\text{rank}(A) + \text{rank}((\text{tr} A)I - \alpha A) = n$ , určete, jakých hodnot může v závislosti na  $n$  a  $\alpha$  nabývat  $\text{rank}(A)$ .

**Úloha 5.** Buď  $f(n)$  počet permutací  $a_1, \dots, a_n$  na číslech  $1, \dots, n$  takových, že  $a_1 = 1$  a  $|a_i - a_{i+1}| \leq 2$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Je  $f(2022)$  násobkem tří?

★ **Úloha 6.** Označme  $i(G)$  počet binárních operací  $\cdot$  na prvcích konečné aditivní grupy  $(G, +)$  takových, že  $(G, +, \cdot)$  je okruh s jednotkou. Najděte dvě posloupnosti  $(G_k)_{k \geq 1}, (H_k)_{k \geq 1}$  konečných komutativních grup, pro něž

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\#G_k}{i(G_k)} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\#H_k}{i(H_k)} = \infty.$$

*Hint: rozmyslete si, že  $i(A \times B) \geq i(A)i(B)$ .*