5. soutěžní série - řešení

1. Pokud má některá stěna více než tři hrany, má 1. tuto vyhrávající strategii: vybarví tuto stěnu S_1, 2. hráč něco obarví. Pokud 2. hráč obarvil stěnu R_1 sousedící s S_1, obarví 1. hráč stěnu S_2, která sousedí s S_1, ale nesousedí s R_1 (jinak obarví libovolnou stěnu sousedící s S_1). Ve třetím tahu 1. hráč obarví jednu ze dvou stěn, které mají společný vrchol s S_1 i S_2 (aspoň jedna z nich zůstala po tahu 2. hráče neobarvená).

Dokážeme nyní, že nutně existuje stěna s více než třemi hranami. Dle Eulerova vzorce $S + V = E + 2$. Z každého vrcholu vychází 3 hrany, tedy $2E = 3V$. Kdyby měla každá stěna 3 hrany, pak by $3S = 2E$, tj. $3(E+2) = 3(S+V) = 4E$, $E = 6$, $S = 4$, spor s $S \geq 5$.

2. Označme v_A délku výšky spuštěné z A a $x = \frac{|R_3R_4|}{|BC|} \in [0,1]$. Pak výška z A v trojúhelníku AR_3R_4 má délku $v_A x$ (z podobnosti trojúhelníků ABC, AR_4R_3) a tedy $|R_2R_3| = v_A(1-x)$ a obsah $S_R = v_A(1-x)\cdot x|BC| = 2x(1-x)$, neboť $v_A|BC| = 2$. Výraz $2x(1-x)$ nabývá svého maxima při $x = \frac{1}{2}$, tj. je-li R_3R_4 střední příčka, a toto maximum je rovno $\frac{1}{2}$. Tedy při pevném obdélníku R je třeba volit S tak, aby S_3S_4 byla střední příčka trojúhelníku AR_3R_4. Pak bude obsah S maximální a bude roven $\frac{1}{2}x^2$. Součet obsahů obou obdélníků pak bude roven $2x(1-x) + \frac{1}{2}x^2 = 2x - \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}x(\frac{4}{3} - x)$, což nabývá svého maxima pro $x = \frac{2}{3}$ a toto maximum je $\frac{2}{3}$.

3. Symetrické reálné matice mají reálná vlastní čísla s plnou geometrickou násobností. Součin vlastních čísel $\prod_{i=1}^n \lambda_i$ je dle předpokladu kladný a zároveň je roven $\det(A)$, což musí být celé číslo. Součet vlastních čísel $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ je roven součtu prvků na diagonále, kterých je nejvýše n. Dohromady AG nerovností získáme

$$n \geq \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1/n} = n\det(A)^{1/n} \geq n,$$

přičemž rovnost nastane právě pro $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$. Pro každý řád matice vyhovuje pouze jednotková matice.

Alternativní řešení: Jsou-li vlastní čísla kladná, je matice pozitivně definitní. Předpokládejme, že prvek $a_{ij} = a_{ji} = 1$ pro některá i, j, $i \neq j$. Pak pro $v = e_i - e_j$ je $v^T Av = a_{ii} + a_{jj} - a_{ij} - a_{ji} = a_{ii} + a_{jj} - 2 \leq 0$, spor s pozitivní definitností. Tj. matice je nutně diagonální a evidentně na diagonále musí být samé jedničky.

4. Nechť F je primitivní funkce f, BÚNO $F(0) = 0$. Nechť $G(x) = F(2x) - 2F(x)$. Pak $G'(x) = 2f(2x) - 2f(x) = 0$ pro každé x, tedy G je konstantní, tedy $F(2x) - 2F(x) = G(x) = G(0) = 2F(0) - F(0) = F(0) = 0$. Tedy $F(2x) = 2F(x)$ pro každé x. Všimněme si, že platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h - 0} = F'(0) = f(0).$$

Vezměme pevné nenulové $x \in \mathbb{R}$. Pak z $F(x) = 2^{-1}F(2^{-1}x)$ plyne

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{F(2^{-1}x)}{2^{-1}x} = \frac{F(2^{-2}x)}{2^{-2}x} = \dots,$$

tedy $\frac{F(2^{-n}x)}{2^{-n}x}$ je konstantní posloupnost, která pro $n \to \infty$ konverguje k $f(0)$ (protože $2^{-n}x$ konverguje do nuly a máme $\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{h} = f(0)$), čili všechny její členy se musí rovnat $f(0)$. Tedy $F(x) = f(0)x$ pro každé $x \neq 0$, a díky $F(0) = 0$ to v nule platí taky. Tedy $F(x) = f(0)x$ pro každé x, tedy $f(x) = F(x)' = f(0)$. Tedy vyhovují jen konstantní funkce - a pro ty to zřejmě pro všechny platí.