4. soutěžní série – řešení

1. BÚNO $d_1 \leq \cdots \leq d_{12}$. Kdyby žádná trojice netvořila délky stran ostroúhlého trojúhelníka, pak by $d_i^2 + d_{i+1}^2 \leq d_{i+2}^2$ pro $i = 1, \ldots, 10$. Protože, $1 \leq d_1^2 \leq d_2^2$, muselo by být (indukcí) $d_k^2 \geq F_k$, kde F_k je k-té Fibonacciho číslo. Máme 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, tj. $F_{12} = 144$, tj. $d_{12} \geq 12$, spor.

2. Nejprve si všimněme, že f je prostá: když $f(a) = f(b)$, tak $a + 2022 = f(2f(a)) = f(2f(b)) = b + 2022$, takže $a = b$. Nyní se podívejme na $f(1), f(3), f(5), \ldots, f(4045)$. Ty musí být různé, takže máme 2023 různých čísel. Tedy z $1, 3, \ldots, 4045$ umíme vybrat k tak, že $f(k) \geq 2023$. Pak ale je $f(k) = (f(k) - 2022) + 2022 = f(2f(f(k) - 2022))$, takže z prostoty f plyne $k = 2f(f(k) - 2022)$, což je ale spor s tím, že k je liché. Takže žádná f splňující zadání neexistuje.

3. Označme $a_n = \cos(n\pi x)$ a $b_n = \cos(n\pi y)$. Pak

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2a_n^2 + 2b_n^2 = a_{2n} + 1 + b_{2n} + 1 = 2 + (a_{2n} + b_{2n}),$$

protože $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$. Tedy, je-li $\{a_n + b_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ konečná, je i $\{a_n - b_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ konečná. Pak jsou ale i množiny $\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{b_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ konečné, protože $a_n = \frac{1}{2}((a_n + b_n) + (a_n - b_n))$ a $b_n = \frac{1}{2}((a_n + b_n) - (a_n - b_n))$. Odtud už plyne, že $x, y \in \mathbb{Q}$.

4. Obarvením bodů o souřadnicích $x \equiv 2y \pmod 7$ a $x \equiv 2y + 3 \pmod 7$ obarvíme nejvýše $14(\frac{n+6}{7})^2$ bodů a zůstanou neobarvené pouze vodorovné úsečky o délkách 2 a 3, které nelze doplnit na neobarvené čtverce. Na druhou stranu v každém čtverci 1×1 bude aspoň jeden bod. Řekneme, že čtverci s k body přispěje každý bod dílem $\frac{1}{k}$. Pak součtem příspěvků přes čtverce očividně nasčítáme n^2. Pro každý bod uvnitř mřížky je na okolním čtverci 2×2 nějaký bod a tedy může přispět nejvýše $1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$. Bod na obvodu mřížky může přispět nejvýše 2. Posčítáním příspěvků přes obarvené body dostaneme $n^2 \leq \frac{7}{2} l(n)$. Celkově $\frac{2}{7} \leq \frac{l(n)}{n^2} \leq \frac{2}{7} \frac{(n+6)^2}{n^2}$ a větou o dvou strážnících potvrdíme limitu.