

4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 11. 4. 2022.

Úloha 1. Nalezněte všechna prvočísla p taková, že $2p + 1$ a $4p + 1$ jsou také prvočísla.

Úloha 2. Pro n přirozené určete počet permutačních (každý sloupec i každý řádek je tvořen právě jednou jedničkou a nulami) $n^2 \times n^2$ matic s následující vlastností: při rozdělení matice na tabulku $n \times n$ podmatic velikostí $n \times n$ je v každé takovéto podmatici právě jedna jednička.

Úloha 3. Pro reálné x definujme posloupnost $(a_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ předpisem $a_{i,0} = \frac{x}{2^i}$, $a_{i,j+1} = a_{i,j}^2 + 2a_{i,j}$. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,n}$.

Úloha 4. Ve čtyřstěnu označme r poloměr koule vepsané a h_k , $k = 1, 2, 3, 4$ vzdálenost k -tého vrcholu od roviny protilehlé stěny. Dokažte

$$\sum_{k=1}^4 \frac{h_k - r}{h_k + r} \geq \frac{12}{5}.$$

Úloha 5. Pro přirozené n označme $f(n)$ poslední nenulovou číslici v dekadickém zápisu čísla $n!$. Dokažte, že pro $n \geq 2$ je $f(625n) = f(n)$.

★ **Úloha 6.** Rozhodněte, zda pro všechny dvojice p_1, p_2 kladných reálných čísel existují funkce $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s primitivními periodami p_i ($i = 1, 2$) takové, že funkce $f_1 - f_2$ je také periodická.